



## КОЭФФИЦИЕНТНАЯ ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ГЕЛЬМГОЛЬЦА

**Е.Б. Сибиряков**

*Институт нефтегазовой геологии и геофизики им. А.А. Трофимука СО РАН,  
630090, Новосибирск, просп. Акад. Коптюга, 3, Россия,  
Сибирский государственный университет телекоммуникации и информатики,  
630009, Новосибирск, ул. Гурьевская, 51, Россия,  
e-mail: SibiryakovEB@ipgg.sbras.ru*

В работе предложен алгоритм решения коэффициентной обратной задачи для уравнения Гельмгольца, использующий минимизацию функционала в спектральной области. В качестве примера рассмотрено нахождение параметров слоя на полупространстве по заданной функции и ее производной на плоской верхней границе в двумерном случае.

*Коэффициентная обратная задача, уравнение Гельмгольца, спектральный метод*

## COEFFICIENT INVERSE PROBLEM FOR THE HELMHOLTZ EQUATION

**E.B. Sibiryakov**

*Trofimuk Institute of Petroleum Geology and Geophysics SB RAS, Koptyug Ave., 3, Novosibirsk, 630090, Russia,  
Siberian State University of Telecommunications and Information Science  
Gurievskaya Str., 51, Novosibirsk, 630090, Russia,  
e-mail: SibiryakovEB@ipgg.sbras.ru*

The paper proposed an algorithm for solving the coefficient inverse problem for the Helmholtz equation, which uses the minimization of the functional in the spectral domain. As an example, the parameters of layer on a half-space was found by using of a given function and its derivative on a plain upper boundary in 2D case.

*Coefficient inverse problem, Helmholtz equation, spectral method*

## ВВЕДЕНИЕ

Коэффициентная обратная задача заключается в нахождении коэффициентов дифференциального уравнения, как правило, с использованием какой-либо дополнительной информации о решении. Поскольку эти коэффициенты зависят от свойств среды, то коэффициентная обратная задача может быть как задачей нахождения свойств среды в зависимости от координат, так и задачей нахождения внутренних границ.

В работе [Аникиев и др., 2012] с помощью преобразования Радона обратная задача для волнового уравнения была сведена к уравнениям типа Гельфанда-Левитана. Однако там же отмечается, что метод плохо применим для низких частот. В работе [Карчевский, 2008] обсуждались разные алгоритмы

численного решения коэффициентных обратных задач для волнового уравнения с использованием разностных схем. Там же был сделан вывод, что обратные задачи для конечно-разностных уравнений являются самостоятельным объектом математического исследования. В статье [Сабитов, Мартемьянова, 2018] показано, что коэффициентная обратная задача для уравнения Гельмгольца является некорректной. Как отмечено в [Кабанихин, 2009] задача Коши для уравнения Лапласа стала первой задачей, на некорректность которой обратили внимание математики.

Обычно для нахождения неизвестных коэффициентов дифференциального уравнения используют решение сопряженной задачи и минимизацию функционалов невязок. Способ избежать минимизации функционалов был предложен в статье [Ватульян, Плотников, 2019]. На основе обобщенного принципа взаимности задача была сведена к некоторым интегральным уравнениям типа Фредгольма первого рода. По-видимому, этот подход оказался приемлемым лишь для градиентных сред. Важным является то, что для решения обратной задачи необходима дополнительная информация о решении. То есть нужна информация не только об отклике среды на нагрузку (обычно этим откликом являются перемещения), но и о самой нагрузке, создаваемой источником. Проблемой здесь является то, что процесс возбуждения, как правило, не является во всей области ни линейным, ни упругим. По этой причине нагрузка, используемая при решении задачи, вычисляется на некоторой эффективной поверхности, как если бы весь процесс был бы линейным и упругим. То есть сам вопрос получения дополнительных данных является нетривиальной, хотя и решаемой проблемой. Но без решения этого вопроса обратную задачу невозможно не только решить, но даже и поставить. Обычно, если волна является достаточно короткой, то нагрузку (источник поля) полагают импульсной и точечной. Это допустимо в случае достаточно коротких волн. Например, в работе [Karchevsky, 2002] в качестве источника использовалась объемная дельта-функция, а в статье [Карчевский, Фатьянов, 2001] – источник, близкий по характеристикам к малозаглубленному взрывному.

Таким образом, для того чтобы поставить обратную задачу для уравнения Гельмгольца, необходимо задать функцию на границе и нормальную производную от нее (как и для решения задачи Коши для уравнения Лапласа). Решение обратной задачи представляет из себя восстановление параметров среды (в том числе конфигурации границ).

Цель данной работы в том, чтобы определить возможность восстановления характеристик среды в случае колебаний, соответствующих достаточно длинной волне, при которой геометрия и функция источника имеют значение. При этом предполагается, используя отклик среды на монохромное колебание (всего на одной временной частоте), восстановить ее свойства (в том числе размеры слоев, заметно меньшие, чем пространственные длины волн, либо конфигурацию границ раздела акустических свойств). Без использования лучей, годографов и суммирования источников, излучающих из разных точек.

## ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

В общем случае двумерная обратная задача формулируется следующим образом. На плоской внешней поверхности (линии) находится система слоев, при этом нижний слой является полупространством (полуплоскостью). Известны функция на поверхности и ее нормальная производная. Верхняя граница – прямая линия  $(0, x)$ . Ось  $z$  направлена вниз. Интервал наблюдения верхней границы  $[-\pi, \pi]$ . За пределами этого интервала функция равна нулю. По аналогии с задачами линейной упругости обозначим нормальную производную от функции на поверхности символом  $P(x) = \frac{\partial U}{\partial z}(0, x)$ . Требуется

найти свойства слоев и границы, если таковые имеются. При этом функция удовлетворяет уравнению Гельмгольца

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} + k_i^2 U = 0. \quad (1)$$

Кроме того, на границе слоев выполняются условия непрерывности функции и нормальной производной. Если границы не являются плоскими, то они представляются в виде разложения по какой-либо системе функций с коэффициентами  $c_k$ . Задача состоит в том, чтобы найти коэффициенты  $k_i, c_k$ . При этом разумные диапазоны изменения этих параметров являются известными.

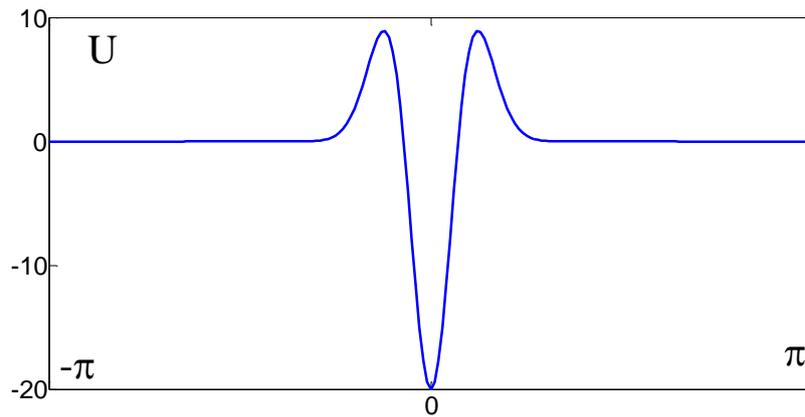


Рис. 1. Функция  $U(x)$ , заданная на поверхности

Одним из распространенных методов решения обратной задачи, то есть нахождения этих коэффициентов, является их перебор в диапазоне разумно допустимых для исследуемой среды. Если этих параметров много (перебрать все значения невозможно), то для их нахождения требуется упорядоченный перебор. Для этого используется функционал невязки. Этот функционал становится функцией многих переменных (параметров среды). Нужно найти минимум этой функции многих переменных, например, градиентным методом. Проблема заключается в том, что у этой функции может быть несколько локальных минимумов. Тогда использование градиентного метода будет проблематичным.

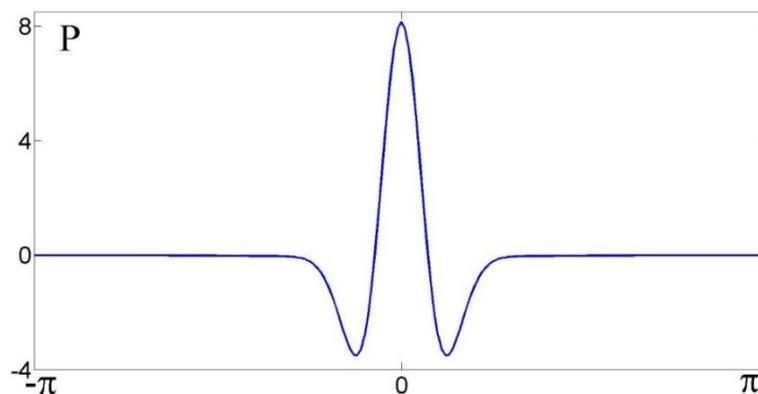


Рис. 2.  $P(x)$  – нормальная производная от функции  $U(0, x)$

В данной работе в расчетах нужно было восстановить три параметра среды: акустическое свойство слоя (он всего один) –  $k_1$ , полупространства –  $k_2$  и толщину плоского слоя –  $H$ . Несмотря на то что параметров всего три, это позволяет сделать некоторые качественные выводы о том, для чего, когда и как нужно использовать решения обратных задач на практике. Итак, на верхней поверхности задана функция (рис. 1), ее нормальная производная (рис. 2). Нужно восстановить толщину слоя, а также акустические свойства слоя и полупространства.

### МЕТОД РЕШЕНИЯ

Необходимо по заданной на поверхности функции найти ее решение в объеме и после этого вычислить нормальную производную на поверхности. Для нахождения решения в объеме разложим функцию  $U(0, x)$  на интервале в ряд Фурье по переменной  $x$ , полагая, что на интервале эта функция представлена рядом, а за его пределами есть ноль.

$$U(0, x) = \hat{U}_0 + \sum_{k_x=1}^{40} \hat{U}_{1k_x} \cos(k_x \omega_{0x} x) + \sum_{k_x=1}^{40} \hat{U}_{2k_x} \sin(k_x \omega_{0x} x) = \sum_{k=1}^{81} S_k U_k. \quad (2)$$

При этом  $\omega_{0x} = 1$ ;  $k_x = k - 1$ , если  $k < 42$  и  $k_x = k - 41$ , если  $k \geq 42$ .

$$S_k = \begin{cases} 1, (k = 1) \\ \cos(k_x x) (k < 42) \\ \sin(k_x x) (k \geq 42) \end{cases}; U_k = \begin{cases} \hat{U}_0 (k = 1) \\ \hat{U}_{1k_x} (k < 42) \\ \hat{U}_{2k_x} (k \geq 42) \end{cases}. \quad (3)$$

Если использовать данное разложение, то переменные разделяются, и задача сводится к краевой задаче для обыкновенного дифференциального уравнения, то есть для каждой компоненты  $S_k$  существует точное решение, которое и было использовано для вычисления функции  $P(x)$ . Истинные значения параметров среды (которые нужно найти), соответствующие функции, представленной на рис. 2, следующие:  $k_1 = 0.4$ ;  $k_2 = 0.8$ ;  $H = 0.4$ . В ходе решения осуществлялся перебор значений акустических параметров слоев и глубины слоя в интервале  $[0.01, 1]$  с шагом 0.01. Таким образом, вычислялась функция четырех переменных  $P_1(x, k_{1i}, k_{2j}, H_k)$ .

Разложение решения на интервале наводит на мысль, что если параметров задачи много, то для ее решения следует аналогичным образом разложить функцию  $P(x)$  и минимизировать спектральный функционал  $J(k_{1i}, k_{2j}, H_k)$ :

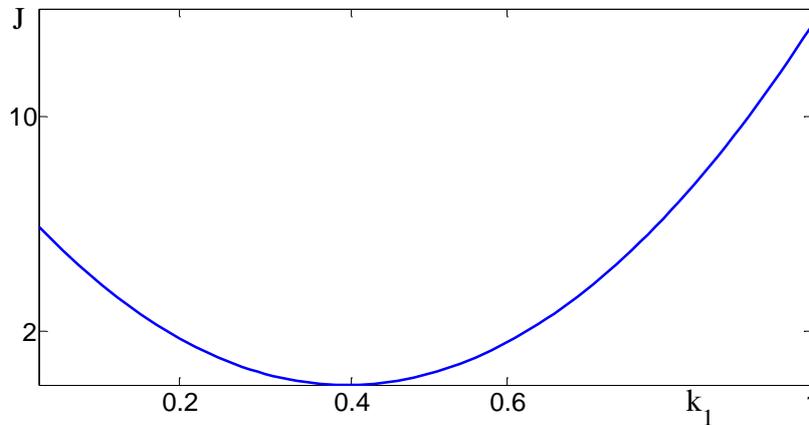
$$P(x) = \sum_{k=1}^{81} S_k(x) P_k; P_1(x) = \sum_{k=1}^{81} S_k(x) P_{1k}(k_{1i}, k_{2j}, H_k), \quad (4)$$

$$J(k_{1i}, k_{2j}, H_k) = \sum_{k=1}^{81} (P_k - P_{1k}(k_{1i}, k_{2j}, H_k))^2. \quad (5)$$

### РЕЗУЛЬТАТЫ И ОБСУЖДЕНИЕ

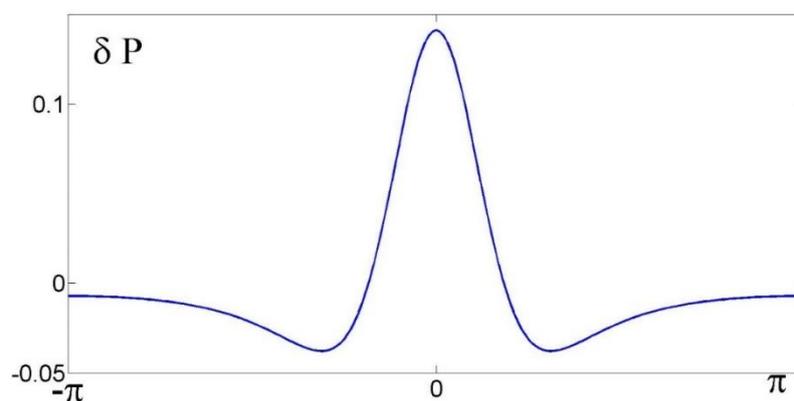
Непосредственный перебор во всем диапазоне параметров приводит к необходимости решения  $100^n$  прямых задач (в данном случае  $n = 3$ ). Непосредственное применение градиентного метода к минимизации функции трех переменных (5) в заданном, достаточно широком диапазоне параметров, дает отрицательный результат. Однако с помощью достаточно простых алгоритмов диапазон искомых оптимальных параметров может быть существенно сужен (т. е. может быть получено достаточно качественное первое приближение). Параметр слоя  $k_1$  в первом приближении определяется как среднее

значение нескольких минимумов функций одной переменной. Фактически задача расщепляется. Значения этого параметра перебираются при фиксированных минимальных и максимальных значениях иных параметров. Значения параметров  $k_1$  (при фиксированных прочих параметрах), при которых достигаются минимумы функции одной переменной, отличаются не очень сильно.



**Рис. 3.** Зависимость функционала (5) от параметра слоя  $k_1$  при  $k_2 = 0.1; H = 0.9$ . Минимум близок к истинному значению  $k_1 = 0.4$

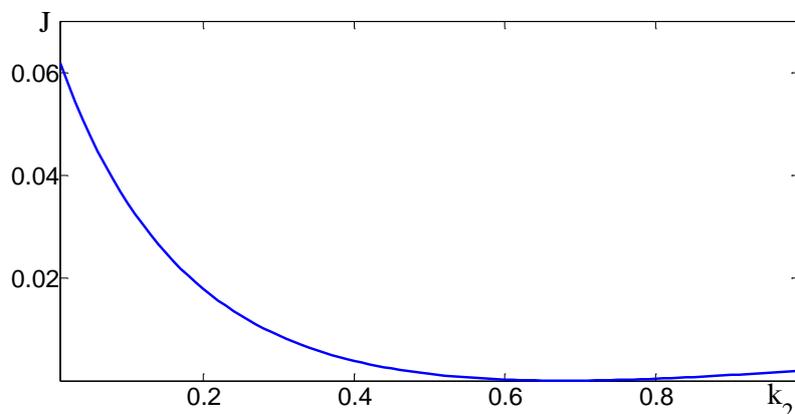
На рисунке 3 представлена зависимость функционала от параметра слоя  $k_1$  при  $k_2 = 0.1; H = 0.9$ . При этом минимум близок к истинному значению  $k_1 = 0.4$ . Причина, по которой минимум функционала значительно более чувствителен к акустическому свойству верхнего слоя, чем к остальным, по-видимому, следующая. Источник сгенерировал колебание, которое почти не замечает границу раздела. При этом функционал является энергетическим, но зависит, главным образом, от разности энергии колебаний на поверхности. Вклад в амплитуду толщины слоя и акустического параметра полупространства незначителен, около двух процентов.



**Рис. 4.** Разность нормальных производных в данной постановке и для случая полупространства с параметром  $k_1 = 0.4$

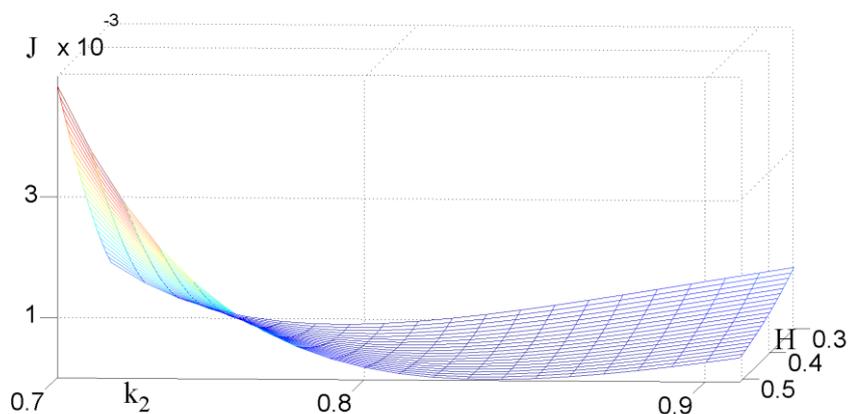
В частности, на рис. 4 представлена разность нормальной производной на поверхности для параметров задачи и для полупространства с параметром  $k_1 = 0.4$  (граница отсутствует). Видно, что наличие такой почти невидимой для колебания границы уменьшает амплитуду почти пропорционально первой степени временной частоты и приводит к некоторому расплыванию сигнала.

Если параметр  $k_1$  установлен близко к реальному значению, то для оставшейся функции двух переменных (в которую превращается функционал (5)) градиентный метод работает. Вычисление производных, как предложено в статье [Карчевский, Дедок, 2018], позволяет найти достоверный локальный минимум (и при необходимости уточнить параметр  $k_1$ ).



**Рис. 5.** Зависимость функционала (5) от параметра полупространства слоя  $k_2$  при  $k_1 = 0.4$ ;  $H = 0.5$ . Минимум близок к значению  $k_2 = 0.7$

Перебор значений параметров при фиксированных прочих параметрах позволяет искать параметры среды в следующих пределах:  $k_1 = 0.4 \pm 0.05$ ;  $k_2 = 0.8 \pm 0.1$ ;  $H = 0.4 \pm 0.1$ . В частности, на рис. 5 представлена зависимость функционала (5) от параметра  $k_2$  при  $k_1 = 0.4$  и  $H = 0.5$ .



**Рис. 6.** Фрагмент функционала (5) как функции двух оставшихся переменных при установленном значении акустического параметра слоя

На рисунке 6, представлен фрагмент функционала при установленном значении параметра верхнего слоя. То есть для восстановления параметров сначала нужно восстанавливать те, которые вносят наибольший вклад в амплитуду сигнала, а потом восстанавливать остальные. Поэтому использовать минимизацию функционала невязки можно в том случае, если вклады параметров в реально измеренные данные сопоставимы, т. е. если вклад различается на один порядок, то оптимизировать с помощью подобного метода можно, если два порядка и более, то, по-видимому, уже нет.

Естественным образом возникает вопрос о том, сколько параметров можно восстановить в результате решения обратной задачи, при условии, что решение прямой задачи находится точно и

достоверно? При данном наборе параметров среды, заданной частоте и форме колебания на поверхности даже обнаружение одной границы можно считать хорошим результатом. Если снижать характерную пространственную длину колебаний, то можно будет восстановить большее количество параметров. Однако на более высоких частотах традиционные лучевые методы обработки сигналов могут дать значения начального приближения некоторых параметров с достаточно высокой степенью точности. В предельном случае лучевого приближения все параметры среды можно восстановить и без решения классических обратных задач. Это означает, что при решении обратной задачи методом минимизации функционала нужно принимать во внимание иерархию параметров по их влиянию на измеряемый сигнал. Тогда градиентные методы минимизации, по-видимому, будут работать надежно и достоверно.

## ВЫВОДЫ

В работе решена задача по восстановлению параметров слоя на полупространстве, слабо влияющего на волновое поле на поверхности. Для решения обратных задач для уравнения Гельмгольца предложено минимизировать функционал в спектральной области. Высказано обоснованное предположение, что при решении обратной задачи методом минимизации нужно принимать во внимание иерархию параметров по их влиянию на измеряемый сигнал. То есть оптимизировать функционал для нахождения параметров, влияние которых на сигнал отличается не более чем на порядок. Исходя из этого, выстраивать из предварительной информации иерархию параметров, подлежащих восстановлению. По этой причине находить решения обратных задачи методом оптимизации функционала следует только для одновременного нахождения тех параметров среды, влияние которых на сигнал сопоставимо по порядку величины. Возможно, что эти результаты можно будет использовать для решения задач пассивной сейсморазведки.

## ЛИТЕРАТУРА

- Аникиев Д.В., Каштан Б.М., Благовещенский А.С., Мулдер В.А.** Точный динамический метод решения обратной задачи сейсмологии на основе интегральных уравнений Гельфанда–Левитана // Вопросы геофизики. – СПб.: Изд-во С.-Петерб. ун-та, 2012. – Вып. 44. – С. 49–81.
- Ватульян А.О., Плотников Д.К.** Обратные коэффициентные задачи в механике // Вестник ПНИПУ. Механика. – 2019. – № 3. – С. 37–47, doi: 10.15593/perm.mech/2019.3.04.
- Кабанихин С.И.** Обратные и некорректные задачи. Учебник для студентов высших учебных заведений. – Новосибирск: Сибирское научное издательство, 2009. – 457 с.
- Карчевский А.Л.** Корректная схема действий при численном решении обратной задачи оптимизационным методом // Сибирский журнал вычислительной математики. – 2008. – № 11 (2). – С. 139–149.
- Карчевский А.Л., Фатьянов А.Г.** Численное решение обратной задачи для системы упругости с последствием для вертикально неоднородной среды // Сибирский журнал вычислительной математики. – 2001. – № 4 (3). – С. 259–268.
- Карчевский А.Л., Дедок В.А.** Восстановление коэффициента диэлектрической проницаемости по модулю рассеянного электрического поля // Сибирский журнал индустриальной математики. – 2018. – № 21 (3). – С. 50–59.
- Сабитов К.Б., Мартемьянова Н.В.** К вопросу о корректности обратных задач для неоднородного уравнения Гельмгольца // Вестник СГТУ. Сер. Физ.-мат. науки. – 2018. – № 22 (2). – С. 269–292.

**Karchevsky A.L.** Several remarks on numerical solution of the one-dimensional coefficient inverse problem // Journal of Inverse Ill-Posed Problems. – 2002. – Vol. 10 (4). – P. 361–383, doi: 10.1515/jiip.2002.10.4.361.

## REFERENCES

**Anikeev D.V., Kashtan B.M., Blagoveshenskii A.S., Mulder V.A.** Exact dynamical method of the inverse seismic problem by integral Gelfand-Levitan equations // Problems of Geophysics. – St. Petersburg University Press, St. Petersburg, 2012. – Vol. 44. – P. 49–81.

**Kabanikhin S.I.** Inverse and Ill-posed Problems. Textbook for Students [in Russian]. – Siberian Scientific Publishing House, Novosibirsk, 2009. – 457 p.

**Karchevsky A.L.** Several remarks on numerical solution of the one-dimensional coefficient inverse problem // Journal of Inverse Ill-Posed Problems. – 2002. – Vol. 10 (4). – P. 361–383, doi: 10.1515/jiip.2002.10.4.361.

**Karchevsky A.L.** A proper flow chart for a numerical solution to an inverse problem by an optimization method // Numerical Analysis and Applications. – 2008. – Vol. 1. – P. 114–122, doi: 10.1134/S1995423908020031.

**Karchevsky A.L., Fatianov A.G.** Numerical solution of the inverse problem for a system of elasticity with the aftereffect for a vertically inhomogeneous medium // Sibirskii Zhurnal Vychislitel'noi Matematiki. – 2001. – Vol. 4 (3). – P. 259–268.

**Karchevsky A.L., Dedok V.A.** Reconstruction of permittivity from the modulus of a scattered electric field // Journal of Applied and Industrial Mathematics. – 2018. – Vol. 12. – P. 470–478, doi: 10.1134/S1990478918030079.

**Sabitov K.B., Martemyanova N.V.** About correctness of inverse problem for the inhomogeneous Helmholtz equation // Vestnik SGTU. Ser. Physical and Mathematical Sciences. – 2018. – Vol. 22 (2). – P. 269–292.

**Vatulyan A.O., Plotnikov D.K.** Inverse coefficient problems in mechanics // PNRPU Mechanics Bulletin. – 2019. – Vol. 3. – P. 37–47.

## КОРОТКО ОБ АВТОРАХ

*СИБИРЯКОВ Егор Борисович* – д.ф.-м.н., старший научный сотрудник лаборатории вычислительной физики горных пород Института нефтегазовой геологии и геофизики СО РАН, профессор кафедры высшей математики Сибирского государственного университета телекоммуникаций и информатики. Основные научные интересы: метод граничных элементов, микронеоднородные среды, удельная поверхность.