



ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ИТЕРАЦИОННОГО РЕШАТЕЛЯ С РАЗДЕЛЕНИЕМ ПОЛЕЙ ПРИ РЕШЕНИИ КВАЗИСТАТИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ БИО

С.А. Соловьев^{1,✉}, В.И. Костин², В.В. Лисица², М.А. Новиков¹

¹Институт математики им. С.Л. Соболева СО РАН, 630090, Новосибирск, просп. Акад. Коптюга, 4, Россия,

²Институт нефтегазовой геологии и геофизики им. А.А. Трофимука СО РАН,
630090, Новосибирск, просп. Акад. Коптюга, 3, Россия,

✉ Сергей Александрович Соловьев, SolovevSA@ipgg.sbras.ru, <https://orcid.org/0000-0001-9984-8367>

Аннотация. С использованием уравнений Био в частотной области в квазистатической постановке моделируется низкочастотное нагружение образца трещиновато-пористой горной породы. Уравнения Био аппроксимируются конечно-разностной схемой на сдвинутых сетках. Для решения полученной системы линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) с числом неизвестных более 10^6 используется итерационный метод (стабилизированный алгоритм бисопряженных градиентов) с предобуславливателем на основе расщепления полей для разделения уравнений и переменных на две группы: описывающих деформацию твердого тела и переноса жидкости. Численные эксперименты демонстрируют быструю сходимость итерационного процесса и его преимущество по сравнению с прямым методом решения СЛАУ на больших задачах.

Ключевые слова: пороупругость, модель Био, конечные разности, прямые методы решения СЛАУ, итерационные методы решения СЛАУ, предобуславливатель с разделением полей

Финансирование: работа выполнена в рамках проекта ФНИ FWZZ-2022-0022 и при поддержке Российского научного фонда, грант № 19-77-20004-П.

Для цитирования: Соловьев С.А., Костин В.И., Лисица В.В., Новиков М.А. Использование итерационного решателя с разделением полей при решении квазистатического уравнения Био // Геофизические технологии. 2024. № 1. С. 19–28. doi:10.18303/2619-1563-2024-1-19.

USING AN ITERATIVE FIELD-SPLIT SOLVER FOR THE QUASI-STATIC BIOT EQUATION

S.A. Solovyev^{1,✉}, V.I. Kostin², V.V. Lisitsa², M.A. Novikov¹

¹Sobolev Institute of Mathematics SB RAS, Koptug Ave., 4, Novosibirsk, 630090, Russia,

²Trofimuk Institute of Petroleum Geology and Geophysics, SB RAS, Koptug Ave., 3, Novosibirsk, 630090, Russia,

✉ Sergey A. Solovyev, SolovevSA@ipgg.sbras.ru, <https://orcid.org/0000-0001-9984-8367>

Abstract. Quasistatic Biot equations in the frequency domain are applied to model low-frequency loading of the fractured porous rock sample. We approximate Biot equations by a finite-difference scheme on the staggered grid, defining different field components at different grid points. To solve the resulting system of linear algebraic equations (SLAE) with more than 10^6 unknown values, we use an iterative method (Biconjugate gradient stabilized method, BCGStab) with a preconditioner based on field-split approach to divide equations into two groups. The first group describes solid deformation, and the second group describes fluid transport. Numerical experiments demonstrate fast convergence of the iterative process for applied method and its advantages in the case of large computational grid in comparison with direct method.

Keywords: poroelasticity, Biot equation, finite differences, direct methods for SLAE, iterative methods, field-split preconditioner

Funding: The study was carried out as part of government assignment to the Russian Academy of Sciences in basic research, Project FWZZ-2022-0022, and supported by the Russian Science Foundation, Project No. 19-77-20004-P.

For citation: Solovyev S.A., Kostin V.I., Lisitsa V.V., Novikov M.A. Using an iterative field-split solver for the quasi-static Biot equation // Russian Journal of Geophysical Technologies. 2024. No. 1. P. 19–28. (In Russ.). doi:10.18303/2619-1563-2024-1-19.

ВВЕДЕНИЕ

Постоянная потребность в совершенствовании подходов, используемых в сейсмическом мониторинге, вызванная актуальностью задачи повышения эффективности разработки нефтяных месторождений, неизбежно влечет за собой необходимость разработки соответствующих алгоритмов. В частности, для моделирования мультифизических процессов в реалистичных моделях трещиновато-пористых сред с целью достоверной оценки зависимостей между транспортными свойствами резервуаров и оценками кинематических параметров по результатам сейсмического мониторинга требуются новые эффективные численные алгоритмы. В основе таких алгоритмов, как правило, лежат математические модели многофазных сред (порода, флюид) в динамической или квазистатической постановке [Masson et al., 2006; Quintal et al., 2011; Novikov et al., 2021; Reshetova, Romenski, 2021], приводящие к увеличению числа описываемых полей по сравнению с упругими моделями и соответственно росту числа неизвестных в соответствующих системах уравнений. Кроме того, для точной оценки степени влияния неоднородности, анизотропии и других свойств сред на характеристики сейсмических волн в них требуется рассмотрение достаточно детальных моделей, что приводит к расчетам на больших расчетных сетках. В связи с этим, численное решение систем линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) в основе моделирования описанных процессов – очень ресурсоемкая задача. Эффективное решение этой задачи требует знаний как в области математических алгоритмов решения СЛАУ, так и в области программной реализации для вычислений с использованием высокопроизводительных вычислительных систем. На первом этапе исследования нами был разработан алгоритм численного апскейлинга пороупругой флюидонасыщенной среды на основе прямого решателя СЛАУ [Соловьев и др., 2023]. В алгоритме используется конечно-разностная аппроксимация уравнения Био в квазистатической постановке в частотной области [Masson et al., 2006; Quintal et al., 2011] на разнесенных сетках [Alekseev, Mikhailenko, 1980]. Полученная СЛАУ может быть решена оптимизированной реализацией прямых методов, в основном использующих LU-декомпозиции [Amestoy et al., 2001; Li, 2005; Bollhofer et al., 2020], однако в таком случае возникают жесткие ограничения на размер расчетной области. Поэтому в настоящей работе предлагается модификация алгоритма с использованием итерационного подхода с применением предобуславливателя [Saad, 1996].

В последнее время наиболее распространенные предобуславливатели – это ILU0, многосеточный [Stuben, 2001], разделения полей (от английского "Field-Split") [Calandrini et al., 2020]. В этой работе используется последний из них, а именно с разделением уравнений и переменных на две группы для их последующего раздельного решения: деформация твердого тела и перенос флюида. На численном решении СЛАУ основан алгоритм апскейлинга для оценки эффективных свойств трещиновато-пористых сред. Исследования проводятся в низкочастотном диапазоне, для аппроксимации уравнений Био используется конечно-разностной подход. Для решения упомянутой СЛАУ рассматриваются два подхода: прямой и итерационный. Первый основан на оптимизированной факторизации матрицы LU, второй – это

итерационный предобусловленный решатель. В рамках второго подхода разработана модификация алгоритма численного апскейлинга с использованием матричного предобуславливателя, основанного на идее разделения полей ("Field-Split"). Численные эксперименты с последующим анализом количества используемой памяти и времени показывают преимущества прямого подхода для небольших задач и итерационного подхода для больших моделей.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Для описания изотропной пороупругой среды с флюидом рассматривается система уравнений Био в квазистатической постановке [Biot, 1956a, b]:

$$\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} = 0, \quad (1)$$

$$-\nabla p = i\omega \frac{\eta}{k} \vec{w}, \quad (2)$$

$$-p = M \left(\alpha (\nabla \cdot \vec{u}) + \nabla \cdot \vec{w} \right), \quad (3)$$

$$\boldsymbol{\sigma} = \lambda (\nabla \cdot \vec{u}) \mathbf{I} + \mu \left(\nabla \vec{u} + (\nabla \vec{u})^T \right) + \alpha M (\nabla \cdot \vec{w}) \mathbf{I}, \quad (4)$$

сведенная исключением тензора $\boldsymbol{\sigma}$ и переменной p к системе уравнений второго порядка:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[C_{11} \frac{\partial u_x}{\partial x} + C_{13} \frac{\partial u_z}{\partial z} \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[C_{55} \left(\frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial x} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial x} \left[\alpha M \left(\frac{\partial w_x}{\partial x} + \frac{\partial w_z}{\partial z} \right) \right] = 0, \quad (5)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[C_{55} \left(\frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial x} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[C_{13} \frac{\partial u_x}{\partial x} + C_{33} \frac{\partial u_z}{\partial z} \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[\alpha M \left(\frac{\partial w_x}{\partial x} + \frac{\partial w_z}{\partial z} \right) \right] = 0, \quad (6)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[\alpha M \left(\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_z}{\partial z} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial x} \left[M \left(\frac{\partial w_x}{\partial x} + \frac{\partial w_z}{\partial z} \right) \right] - i\omega \frac{\eta}{k} w_x = 0, \quad (7)$$

$$\frac{\partial}{\partial z} \left[\alpha M \left(\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_z}{\partial z} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[M \left(\frac{\partial w_x}{\partial x} + \frac{\partial w_z}{\partial z} \right) \right] - i\omega \frac{\eta}{k} w_z = 0. \quad (8)$$

Здесь $\boldsymbol{\sigma}$ – тензор напряжений флюидонасыщенной среды, p – давление флюида, $\vec{u} = (u_x, u_z)^T$ – вектор смещения твердых частиц, $\vec{w} = (w_x, w_z)^T$ – вектор относительного смещения флюида. В коэффициентах уравнений находятся ω – частота, η – вязкость флюида, k – проницаемость скелета, λ – постоянная Ламе флюидонасыщенной среды, μ – модуль сдвига скелета, M – коэффициент накопления жидкости, α – коэффициент Био–Уиллиса. В уравнениях второго порядка (5)–(8) параметры C_{11} , C_{13} , C_{33} , C_{55} – компоненты тензора жесткости флюидонасыщенного скелета. Параметры C_{ij} , M и α определяются через упругие модули среды, объемные модули сжатия фаз, скелета и его пористость [Новиков и др., 2018].

Тензор напряжений в пористой среде с флюидом связан с деформациями законом Гука в виде

$$\begin{pmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{zz} \\ \sigma_{xz} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{13} & 0 \\ C_{13} & C_{33} & 0 \\ 0 & 0 & C_{55} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{zz} \\ \varepsilon_{xz} \end{pmatrix}, \quad \begin{aligned} \varepsilon_{zz} &= \frac{\partial u_z}{\partial z}, \quad \varepsilon_{xx} = \frac{\partial u_x}{\partial x}, \\ \varepsilon_{xz} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_z}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial z} \right). \end{aligned} \quad (9)$$

Для системы уравнений (5)–(8) используются граничные условия Неймана:

$$\begin{aligned} \sigma \cdot \vec{n} |_{\partial D} &= \vec{\sigma}_0 \\ \vec{w} \cdot \vec{n} |_{\partial D} &= 0. \end{aligned} \quad (10)$$

Численное решение поставленной начально-краевой задачи позволяет моделировать нагружение образцов флюидонасыщенной породы и лежит в основе эффективного алгоритма численного апскейлинга для оценки эффективных свойств изотропных трещиновато-пористых сред. Алгоритм численного апскейлинга заключается в восстановлении свойств вязкоупругой среды, «эквивалентной» неоднородной пороупругой среде. В частности, восстанавливается такой частотно-зависимый тензор жесткости однородной вязкоупругой среды, осредненные напряжения в которой совпадают с напряжениями в пороупругой среде при одинаковых нагрузках. Под эффективностью алгоритма понимается нахождение достаточно точного решения за приемлемое время и с использованием достаточного количества оперативной памяти. Детали алгоритма восстановления тензора жесткости описаны в работах [Solovyev et al., 2022; Соловьев и др., 2023].

Для численного решения системы уравнений Био (1)–(4) используется ее аппроксимация конечно-разностной схемой на разнесенных сетках. Сеточные шаблоны для уравнений, граничных условий и детали аппроксимации подробно описаны в работе [Solovyev et al., 2022]. Результатом аппроксимации является система линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) с разреженной неэрмитовой и несимметричной матрицей A , для решения которой используются как прямой, так и итерационный методы.

ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ СЛАУ ЗАДАЧИ НАГРУЖЕНИЯ ОБРАЗЦА ПОРОДЫ

Для численного решения СЛАУ используют либо прямые, либо итерационные методы и реализованные на их основе алгоритмы (решатели). И те, и другие имеют свои плюсы и минусы. Далее опишем каждый из них более подробно.

Прямые решатели обеспечивают наилучшую точность, не очень высокую производительность и большой расход памяти. Как правило, они основаны на алгоритмах LU-факторизации. Для СЛАУ с разреженными матрицами существуют усовершенствованные алгоритмы, позволяющие повысить производительность и снизить потребности в памяти, такие как переупорядочивание элементов матрицы СЛАУ, использование мультифронтальной и суперузловой факторизации и т. д. Многие прямые решатели содержат такие алгоритмы: MUMPS [Amestoy et al., 2001], SuperLU [Li, 2005], PARDISO [Bollhofer et al., 2020] и др. Несмотря на такую оптимизацию, они не могут решать большие задачи. Например, в наших экспериментах на системе с 512 ГБ ОЗУ (см. ниже) максимальное количество точек сетки для дискретизации Био составляет около 2000×2000 , в то время как итерационное решение справляется с задачей размером 4000×4000 .

В данной работе используется решатель PARDISO из библиотеки Intel MKL. Исследование реконструкции эффективных вязкоупругих сред представлено в [Solov'yev et al., 2022]. Здесь прямой решатель исследуется лишь с точки зрения масштабируемости и производительности в сравнении с предлагаемым итерационным решателем.

Основным преимуществом *итерационных* методов является небольшое потребление памяти. Несмотря на это, они могут не достигнуть той же точности, что прямые методы, из-за плохой сходимости. Однако это можно решить путем выбора подходящего итерационного алгоритма, разработав подходящий предобуславливатель.

Использование предобуславливателя B позволяет получить СЛАУ: $\hat{A}x = \hat{b}$, где $\hat{A}x = B^{-1}Ax$, $\hat{b} = B^{-1}b$. Для решения СЛАУ с несимметричной матрицей $\hat{A}$, будем использовать алгоритм BCGStab [Saad, 1996].

Основной критерий построения предобуславливателя состоит в том, что он должен быть легко обратим. При этом обращение предобуславливателя должно быть достаточно быстрым. Результаты промежуточных экспериментов, оставленных за рамками данной работы, показали, что такие известные предобуславливатели, как Якоби, Блок–Якоби и Зейделя, не удается применять для достижения этой цели, поскольку BCGStab с их использованием не сходится с достаточной точностью.

Предлагается использовать для построения предобуславливателя подход разделения полей

("Field-Split"). Идея заключается в удалении операторов $\frac{\partial}{\partial x} \left[\alpha M \left(\frac{\partial w}{\partial x} x + \frac{\partial w}{\partial z} z \right) \right]$ и $\frac{\partial}{\partial z} \left[\alpha M \left(\frac{\partial w}{\partial x} x + \frac{\partial w}{\partial z} z \right) \right]$,

связанных с неизвестной переменной w из уравнений (1) и (2). После такого удаления применением конечно-разностной аппроксимации определяется блочный нижнетреугольный предобуславливатель B , который вместе с исходной матрицей можно записать в блочном виде (10).

$$A = \begin{pmatrix} A_0 & A_1 \\ A_2 & A_3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} A_0 & 0 \\ A_2 & A_3 \end{pmatrix}, \quad x = \begin{pmatrix} x_0 \\ x_3 \end{pmatrix}, \quad y = \begin{pmatrix} y_0 \\ y_3 \end{pmatrix}. \quad (11)$$

Здесь матрица A_0 соответствует оператору уравнений (1) и (2) для переменной u ; A_2 – матрица оператора уравнений (3) и (4) для u ; A_3 – матрица оператора уравнений (3) и (4) для w . При этом матрицы A_0 и A_2 вещественны и не зависят от частот ω , а матрица A_3 имеет комплекснозначные элементы лишь на главной диагонали.

Таким образом, алгоритм решения СЛАУ $Bx = y$ выглядит следующим образом:

1. Решение системы $A_0 x_0 = y_0$;
2. Вычисление $y_3 = y_3 - A_2 x_0$;
3. Решение системы $A_3 x_3 = y_3$.

Основное преимущество обращения A_0 и A_3 по сравнению с обращением полной матрицы A состоит в том, что первые меньше последней, при этом A_0 не зависит от частоты, и в случае обращения прямым решателем A_0 можно разложить единожды для всех частот. Более того, A_3 достаточно факторизовать для каждой частоты один раз для всех итераций.

РЕЗУЛЬТАТЫ

Описанный решатель с разделением полей реализован на языке C и скомпилирован компилятором Intel с оптимизацией по умолчанию для использования на аппаратном обеспечении Intel Xeon с процессором E5-2690 и 20 ядрами 3.00 ГГц, 512 Гб оперативной памяти.

В численных экспериментах сравниваются прямой и итерационный решатели на задачах нагружения двумерного образца [Соловьев и др., 2023] для различных размеров расчетной сетки: 500×500, 1000×1000, 2000×2000 и 4000×4000 ячеек. Для решаемых задач измеряются количество FLOPS, потребление памяти, масштабируемость и производительность. Модель среды в численных экспериментах представлена квадратной областью с трещинами (рис. 1). Особенности построения модели трещиноватой среды детально описываются в работе [Novikov et al., 2020] Трещины представляют собой прямоугольные подобласти, а на расчетной сетке – наборы узлов, физические свойства среды в которых отличаются от свойств вмещающей породы. Коэффициенты уравнений Био (1)–(4) во вмещающей породе и трещинах представлены в табл. 1.

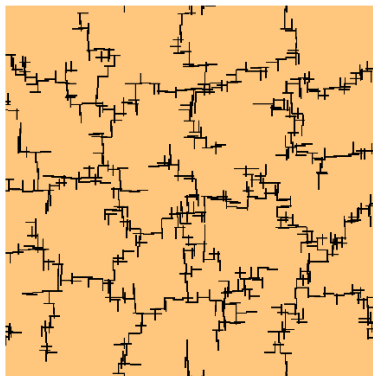


Рис. 1. Изображение модели трещиноватой среды. Черным обозначены трещины, желтым – вмещающая порода.

Результаты сравнения работы двух решателей приведены в табл. 2. Из нее видно, что в непараллельном режиме (число OMP-потоков задано равным 1) итерационный решатель быстрее прямого. С другой стороны, масштабируемость прямого решателя лучше, чем итерационного, поэтому он быстрее на задачах, которым хватает оперативной памяти RAM для хранения факторов переупорядоченной матрицы СЛАУ. Несмотря на это, заметно сокращение времени отставания итерационного метода от прямого при увеличении размера задачи.

С точки зрения потребления памяти прямой решатель уступает итерационному. В итерационном решателе потребление памяти может быть дополнительно уменьшено за счет использования других подходов к обращению блоков предобуславливателя матрицы. Однако эта работа выходит за рамки данной статьи и будет исследована в дальнейшем в рамках решения трехмерной задачи Био.

Таблица 1

Коэффициенты уравнений Био для численных экспериментов

Коэфф.	Твердая фаза	Трещина
C_{11}	$69.10 \cdot 10^9$	$38.96 \cdot 10^9$
C_{12}	$71.6 \cdot 10^9$	$32.67 \cdot 10^9$
C_{22}	$69.10 \cdot 10^9$	$38.96 \cdot 10^9$
C_{33}	$30.97 \cdot 10^9$	$22.62 \cdot 10^9$
M	$20.10 \cdot 10^9$	$9.33 \cdot 10^9$
αM	$5.95 \cdot 10^9$	$6.85 \cdot 10^9$
η/k	$1000.0 \cdot 10^9$	$0.007 \cdot 10^9$

Таблица 2

**Характеристики используемой памяти и времени счета прямого и итерационного методов
(одна трещиноватая модель, одна частота (100 Гц))**

Размер сетки	Используемая память (RAM, G)		Время счета, с.			
	Прямой	Итерационный	Прямой		Итерационный	
			1 OMP- поток	16 OMP- потоков	1 OMP- поток	16 OMP- потоков
$n = n_x = n_z$						
500	4	2	42	7	34	16
1000	18	9	297	41	177	68
2000	83	41	2 498	276	1 101	319
4000	Н/Д	190	Н/Д	Н/Д	9 173	1 654

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе предложен итерационный решатель BCGStab с предобуславливателем разделения полей для решения задачи низкочастотного нагружения трещиновато-пористого образца горной породы. По результатам численных экспериментов проведено сравнение исследуемого решателя с высокооптимизированным прямым решателем Intel MKL PARDISO.

Сравнение производительности решателей показало, что прямой имеет преимущества во времени решения небольших задач в параллельном режиме на 16 ядрах. Однако демонстрируемая производительность предложенного решателя позволяет предполагать, что на больших системах его производительность достигнет производительности прямого. Кроме того, измерения памяти показывают, что итерационный решатель позволяет сократить потребности в памяти более чем в два раза.

Таким образом, предложенный итерационный решатель может быть использован для решения больших задач по моделированию квазистатического нагружения пороупругих образцов для оценки их эффективных частотно-зависимых упругих параметров в двумерной и трехмерной постановках.

СПИСОК ИСТОЧНИКОВ

- Новиков М.А., Лисица В.В., Козяев А.А.** Численное моделирование волновых процессов в трещиновато-пористых флюидонасыщенных средах // Вычислительные методы и программирование. 2018. Т. 19, № 2. С. 130–149.
- Соловьев С.А., Новиков М.А., Лисица В.В.** Численное решение уравнений Био анизотропной пороупругой флюидонасыщенной среды в квазистатической постановке для численного решения задачи апскейлинга // Вычислительные методы и программирование. 2023. Т. 24, № 1. С. 67–88. doi:10.26089/NumMet.v24r106.
- Alekseev A.S., Mikhailenko B.G.** The solution of dynamic problems of elastic wave propagation in inhomogeneous media by a combination of partial separation of variables and finite-difference methods // Journal of Geophysics. 1980. Vol. 48 (1). P. 161–172.
- Amestoy P.R., Duff I.S., L'Excellent J.-Y., Koster J.** A fully asynchronous multifrontal solver using distributed dynamic scheduling // SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications. 2001. Vol. 23 (1). P. 15–41. doi:10.1137/S089547989935819.
- Biot M.A.** Theory of propagation of elastic waves in fluid-saturated porous solid. I. Low-frequency range // Journal of the Acoustical Society of America. 1956a. Vol. 28 (2). P. 168–178. doi:10.1121/1.1908239.
- Biot M.A.** Theory of propagation of elastic waves in a fluid-saturated porous solid. II. Higher frequency range // Journal of the Acoustical Society of America. 1956b. Vol. 28 (2). P. 179–191. doi:10.1121/1.1908241.
- Bollhöfer M., Schenk O., Janalik R., Hamm S., Gullapalli K.** State-of-the-art sparse direct solvers // Grama A., Sameh A. (Eds.) Parallel Algorithms in Computational Science and Engineering. Modeling and Simulation in Science, Engineering and Technology. Baser: Birkhäuser Cham, 2020. P. 3–33. doi:10.48550/arXiv.1907.05309.
- Calandrini S., Aulisa E., Ke G.** A field-split preconditioning technique for fluid-structure interaction problems with applications in biomechanics // International Journal for Numerical Methods in Biomedical Engineering. 2020. Vol. 36 (3). P. e3301. doi:10.1002/cnm.3301.
- Masson Y.J., Pride S.R., Nihei K.T.** Finite difference modeling of Biot's poroelastic equations at seismic frequencies // Journal of Geophysical Research: Solid Earth. 2006. Vol. 111 (B10305). P. 1–13. doi:10.1029/2006JB004366.
- Novikov M.A., Lisitsa V.V., Bazaikin Ya.V.** Wave propagation in fractured-porous media with different percolation length of fracture systems // Lobachevskii Journal of Mathematics. 2020. Vol. 41 (8). P. 1533–1544. doi:10.1134/S1995080220080144.
- Novikov M., Lisitsa V., Khachkova T., Reshetova D., Vishnevsky D.** Numerical algorithm of seismic wave propagation and seismic attenuation estimation in anisotropic fractured porous fluid-saturated media // 21st International Conference on Computational Science and Its Applications, ICCSA 2021. Lecture Notes in Computer Science (including subseries Lecture Notes in Artificial Intelligence and Lecture Notes in Bioinformatics). 2021. Vol. 12949 LNCS. P. 434–448. doi:10.1007/978-3-030-86653-2_32.
- Li X.S.** An overview of SuperLU: Algorithms, implementation, and user interface // ACM Transactions on Mathematical Software. 2005. Vol. 31 (3). P. 302–325. doi:10.1145/1089014.1089017.
- Quintal B., Steeb H., Frehner M., Schmalholz S.M.** Quasi-static finite element modeling of seismic attenuation and dispersion due to wave-induced fluid flow in poroelastic media // Journal of Geophysical Research. 2011. Vol. 116 (B1). P. 1–17. doi:10.1029/2010JB007475.

- Reshetova G., Romenski E.** Diffuse interface approach to modeling wavefields in a saturated porous medium // *Applied Mathematics and Computation*. 2021. Vol. 398. P. 12598. doi:10.1016/j.amc.2021.125978.
- Saad Y.** *Iterative Methods for Sparse Linear Systems*. New York: PWS Publishing, 1996. 447 p.
- Solov'yev S., Novikov V., Lisitsa V.** Numerical solution of anisotropic Biot equations in quasi-static state // 22nd International Conference on Computational Science and Its Applications, ICCSA 2022. *Lecture Notes in Computer Science* (including subseries *Lecture Notes in Artificial Intelligence* and *Lecture Notes in Bioinformatics*). 2022. Vol. 13378 LNCS. P. 310–327. doi:10.1007/978-3-031-10562-3_23.
- Stuben K.** A review of algebraic multigrid // *Journal of Computational and Applied Mathematics*. 2001. Vol. 128 (1–2). P. 281–309. doi:10.1016/S0377-0427(00)00516-1.

REFERENCES

- Alekseev A.S., Mikhailenko B.G.** The solution of dynamic problems of elastic wave propagation in inhomogeneous media by a combination of partial separation of variables and finite-difference methods // *Journal of Geophysics*. 1980. Vol. 48 (1). P. 161–172.
- Amestoy P.R., Duff I.S., L'Excellent J.-Y., Koster J.** A fully asynchronous multifrontal solver using distributed dynamic scheduling // *SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications*. 2001. Vol. 23 (1). P. 15–41. doi:10.1137/S089547989935819.
- Biot M.A.** Theory of propagation of elastic waves in fluid-saturated porous solid. I. Low-frequency range // *Journal of the Acoustical Society of America*. 1956a. Vol. 28 (2). P. 168–178. doi:10.1121/1.1908239.
- Biot M.A.** Theory of propagation of elastic waves in a fluid-saturated porous solid. II. Higher frequency range // *Journal of the Acoustical Society of America*. 1956b. Vol. 28 (2). P. 179–191. doi:10.1121/1.1908241.
- Bollhöfer M., Schenk O., Janalik R., Hamm S., Gullapalli K.** State-of-the-art sparse direct solvers // Grama A., Sameh A. (Eds.) *Parallel Algorithms in Computational Science and Engineering. Modeling and Simulation in Science, Engineering and Technology*. Basel: Birkhäuser Cham, 2020. P. 3–33. doi:10.48550/arXiv.1907.05309.
- Calandrini S., Aulisa E., Ke G.** A field-split preconditioning technique for fluid-structure interaction problems with applications in biomechanics // *International Journal for Numerical Methods in Biomedical Engineering*. 2020. Vol. 36 (3). P. e3301. doi:10.1002/cnm.3301.
- Masson Y.J., Pride S.R., Nihei K.T.** Finite difference modeling of Biot's poroelastic equations at seismic frequencies // *Journal of Geophysical Research: Solid Earth*. 2006. Vol. 111 (B10305). P. 1–13. doi:10.1029/2006JB004366.
- Novikov M.A., Lisitsa V.V., Kozyaev A.A.** Numerical modeling of wave processes in fractured porous fluid-saturated media // *Numerical Methods and Programming*. 2018. Vol. 19 (2). P. 130–149.
- Novikov M.A., Lisitsa V.V., Bazaikin Ya.V.** Wave propagation in fractured-porous media with different percolation length of fracture systems // *Lobachevskii Journal of Mathematics*. 2020. Vol. 41 (8). P. 1533–1544. doi:10.1134/S1995080220080144.
- Novikov M., Lisitsa V., Khachkova T., Reshetova D., Vishnevsky D.** Numerical algorithm of seismic wave propagation and seismic attenuation estimation in anisotropic fractured porous fluid-saturated media // 21st International Conference on Computational Science and Its Applications, ICCSA 2021. *Lecture Notes in Computer Science* (including subseries *Lecture Notes in Artificial Intelligence* and *Lecture Notes in Bioinformatics*). 2021. Vol. 12949 LNCS. P. 434–448. doi:10.1007/978-3-030-86653-2_32.

- Li X.S.** An overview of SuperLU: Algorithms, implementation, and user interface // ACM Transactions on Mathematical Software. 2005. Vol. 31 (3). P. 302–325. doi:10.1145/1089014.1089017.
- Quintal B., Steeb H., Frehner M., Schmalholz S.M.** Quasi-static finite element modeling of seismic attenuation and dispersion due to wave-induced fluid flow in poroelastic media // Journal of Geophysical Research. 2011. Vol. 116 (B1). P. 1–17. doi:10.1029/2010JB007475.
- Reshetova G., Romenski E.** Diffuse interface approach to modeling wavefields in a saturated porous medium // Applied Mathematics and Computation. 2021. Vol. 398. P. 12598. doi:10.1016/j.amc.2021.125978.
- Saad Y.** Iterative Methods for Sparse Linear Systems. New York: PWS Publishing, 1996. 447 p.
- Solovyev S., Novikov V., Lisitsa V.** Numerical solution of anisotropic Biot equations in quasi-static state // 22nd International Conference on Computational Science and Its Applications, ICCSA 2022. Lecture Notes in Computer Science (including subseries Lecture Notes in Artificial Intelligence and Lecture Notes in Bioinformatics). 2022. Vol. 13378 LNCS. P. 310–327. doi:10.1007/978-3-031-10562-3_23.
- Solovyev S.A., Novikov M.A., Lisitsa V.V.** Numerical solution of anisotropic Biot equations of poroelastic fluid-saturated media in quasi-static state for numerical upscaling // Numerical Methods and Programming. 2023. Vol. 24 (1). P. 67–88. doi:10.26089/NumMet.v24r106.
- Stuben K.** A review of algebraic multigrid // Journal of Computational and Applied Mathematics. 2001. Vol. 128 (1–2). P. 281–309. doi:10.1016/S0377-0427(00)00516-1.

ИНФОРМАЦИЯ ОБ АВТОРАХ

СОЛОВЬЕВ Сергей Александрович – кандидат физико-математических наук, научный сотрудник Института математики СО РАН. Основные научные интересы: методы численного решения СЛАУ, высокопроизводительные вычисления.

КОСТИН Виктор Иванович – кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник лаборатории вычислительной физики горных пород Института нефтегазовой геологии и геофизики СО РАН. Основные научные интересы: численное моделирование сейсмических волновых полей, высокопроизводительные вычисления.

ЛИСИЦА Вадим Викторович – доктор физико-математических наук, заведующий лабораторией вычислительной физики горных пород Института нефтегазовой геологии и геофизики СО РАН. Основные научные интересы: численные методы для моделирования физических процессов в пористых средах, <https://orcid.org/0000-0003-3544-4878>.

НОВИКОВ Михаил Александрович – младший научный сотрудник лаборатории Института математики СО РАН. Основные научные интересы: численные методы решения уравнений поропругости, методы численной оценки затухания сейсмических волн, <https://orcid.org/0000-0002-6373-3370>.

Вклад авторов: Лисица В.В. и Костин В.И. сформулировали математическую постановку задачи в рамках проекта ФНИ FWZZ-2022-0022. Соловьев С.А. разрабатывал алгоритмы численного решения, а Новиков В.А. проводил численное моделирование при поддержке гранта РФФИ № 19-77-20004-П.

Статья поступила в редакцию 20 ноября 2023 г.,
одобрена после рецензирования 25 декабря 2023 г.,
принята к публикации 27 декабря 2023 г.