Геофизические технологии. 2024. № 1. С. 47–59 **www.rjgt.ru**
Russian Journal of Geophysical Technologies. 2024. No. 1. P. 47–59
Научная статья / Original article
УДК 539.3
doi:10.18303/2619-1563-2024-1-47

ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ РАСПРОСТРАНЕНИЯ ВОЛН В БЛОЧНО-СЛОИСТОЙ СРЕДЕ С ТОНКИМИ УПРУГИМИ И ВЯЗКОУПРУГИМИ ПРОСЛОЙКАМИ

Евгений Александрович Ефимов[1,✉], Владимир Михайлович Садовский[2]

[1,2]*Институт вычислительного моделирования СО РАН, 660036, Красноярск, Академгородок, 50, стр. 44, Россия,*
[1]*efimov@icm.krasn.ru, https://orcid.org/0000-0003-1830-6721*
[2]*sadov@icm.krasn.ru, https://orcid.org/0000-0001-9695-0032*

Аннотация. Рассматривается математическая модель блочно-слоистой среды с тонкими прослойками. Она описывает упругие деформации как блоков, так и прослоек. Для описания затухания волн учитываются вязкоупругие свойства материалов прослоек. Исследуются волновые поля, возбуждаемые в блочной среде. Проведено сравнение результатов численного моделирования с экспериментальными данными.

Ключевые слова: блочно-слоистая среда, вязкоупругие прослойки, высокопроизводительные вычисления

Финансирование: работа поддержана Красноярским математическим центром, финансируемым Минобрнауки РФ в рамках мероприятий по созданию и развитию региональных НОМЦ (Соглашение 075-02-2023-912).

Для цитирования: Ефимов Е.А., Садовский В.М. Численное моделирование распространения волн в блочно-слоистой среде с тонкими упругими и вязкоупругими прослойками // Геофизические технологии. 2024. № 1. С. 47–59. doi:10.18303/2619-1563-2024-1-47.

NUMERICAL SIMULATION OF WAVE PROPAGATION IN BLOCKY-LAYERED MEDIUM WITH THIN ELASTIC AND VISCOELASTIC INTERLAYERS

Evgenii A. Efimov[1,✉], Vladimir M. Sadovskii[2]
[1,2]*Institute of Computational Modelling SB RAS, Akademgorodok, 50/44, Krasnoyarsk, 660036, Russia,*
[1]*efimov@icm.krasn.ru, https://orcid.org/0000-0003-1830-6721*
[2]*sadov@icm.krasn.ru, https://orcid.org/0000-0001-9695-0032*

Abstract. A mathematical model of a blocky-layered medium with thin layers is considered. This model describes elastic deformations of both blocks and interlayers. The viscoelastic properties of the interlayer materials are taken into account in order to describe wave attenuation. Wave fields excited in a blocky medium are investigated. The results of numerical simulation are compared with experimental data.

Keywords: blocky-layered medium, viscoelastic interlayers, high-performance computing

Funding: The study was supported by Krasnoyarsk Mathematical Center and financed by the Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation in the framework of the establishment and development of regional Centers for Mathematics Research and Education (Agreement No. 075-02-2023-912).

For citation: Efimov E.A., Sadovskii V.M. Numerical simulation of wave propagation in blocky-layered medium with thin elastic and viscoelastic interlayers // Russian Journal of Geophysical Technologies. 2024. No. 1. P. 47–59. (In Russ.). doi:10.18303/2619-1563-2024-1-47.

ВВЕДЕНИЕ

Концепцию блочной структуры массивов горных пород предложил М.А. Садовский [Садовский, 1979]. Согласно этой концепции геологическая среда может быть представлена в виде иерархической структуры, состоящей из вложенных друг в друга блоков разных масштабов. Характерные размеры блоков могут быть от нескольких метров до десятков километров [Садовский, Сардаров, 1980]. Когда материал прослоек более податлив, чем материал блоков, в такой среде наблюдаются маятниковые волны. Исследованию маятниковых волн в блочных средах посвящены как теоретические, так и экспериментальные работы. В работах [Александрова, Шер, 2010; Александрова, 2015] исследуются модели динамики блочных сред, представляемые в виде дискретно-периодических решеток из блоков, соединенных упругими пружинами. В данном случае возможно представление блоков в виде жестких масс, когда деформациям подвергаются преимущественно только прослойки за счет их высокой податливости. Учет вязкоупругих свойств в прослойках позволяет хорошо описать характер затухания волн в блочных средах, что вполне соответствует экспериментальным данным [Сарайкин и др., 2015].

Более сложной является модель, в которой деформация блоков рассматривается в точной постановке с применением уравнений динамической теории упругости. Если среда содержит достаточно большое количество блоков, то для ее описания применима модель моментного континуума Коссера. Подробный численный анализ волновых полей в блочной среде и в моментном континууме был проведен в работах [Садовский и др., 2014; Sadovskii, Sadovskaya, 2015].

В данной работе рассматривается двумерная модель блочно-слоистой среды с упругими блоками и тонкими упругими и вязкоупругими прослойками. Используемые уравнения в прослойках представляют собой систему обыкновенных дифференциальных уравнений, в то время как деформация блоков описывается уравнениями динамической теории упругости в частных производных. Пожалуй, более последовательным был бы подход, в котором прослойки подобно блокам описываются уравнениями теории упругости. Однако такой способ более сложен в реализации, в частности, из-за разных ограничений на шаг по времени в блоке и прослойке. Предложенная упрощенная модель блочно-слоистой среды так же, как и модель, полностью описанная уравнениями теории упругости, обладает свойством термодинамической согласованности. В случае разных материалов блоков расчеты по обеим моделям дают идентичные волновые картины. Расчеты, проведенные для блочной среды с тонкими вязкоупругими прослойками, достаточно хорошо согласуются с данными эксперимента, опубликованными в работе [Сарайкин и др., 2015].

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ

Рассмотрим двумерную модель среды с однородными изотропными упругими блоками и тонкими упругими прослойками. Волновые движения в блоках с учетом малости деформаций описываются системой уравнений:

$$\rho\frac{\partial v_1}{\partial t}=\frac{\partial\sigma_{11}}{\partial x_1}+\frac{\partial\sigma_{12}}{\partial x_2},\qquad \rho\frac{\partial v_2}{\partial t}=\frac{\partial\sigma_{12}}{\partial x_1}+\frac{\partial\sigma_{22}}{\partial x_2},$$
$$\frac{\partial\sigma_{11}}{\partial t}=(\lambda+2\mu)\frac{\partial v_1}{\partial x_1}+\lambda\frac{\partial v_2}{\partial x_2},\qquad \frac{\partial\sigma_{22}}{\partial t}=\lambda\frac{\partial v_1}{\partial x_1}+(\lambda+2\mu)\frac{\partial v_2}{\partial x_2}, \tag{1}$$
$$\frac{\partial\sigma_{12}}{\partial t}=\mu\Big(\frac{\partial v_2}{\partial x_1}+\frac{\partial v_1}{\partial x_2}\Big).$$

Уравнения для продольных и сдвиговых движений в прослойке вдоль направления оси x_1 запишутся следующим образом:

$$\rho' \frac{d}{dt}\frac{v_1^+ + v_1^-}{2} = \frac{\sigma_{11}^+ - \sigma_{11}^-}{\delta_1}, \qquad \rho' \frac{d}{dt}\frac{v_2^+ + v_2^-}{2} = \frac{\sigma_{12}^+ - \sigma_{12}^-}{\delta_1},$$
$$\rho' \frac{d}{dt}\frac{\sigma_{11}^+ + \sigma_{11}^-}{2} = (\lambda' + 2\mu')\frac{v_1^+ - v_1^-}{\delta_1}, \tag{2}$$
$$\rho' \frac{d}{dt}\frac{\sigma_{12}^+ + \sigma_{12}^-}{2} = \mu'\frac{v_2^+ - v_2^-}{\delta_1},$$

аналогично в направлении оси x_2:

$$\rho' \frac{d}{dt}\frac{v_2^+ + v_2^-}{2} = \frac{\sigma_{22}^+ - \sigma_{22}^-}{\delta_2}, \qquad \rho' \frac{d}{dt}\frac{v_1^+ + v_1^-}{2} = \frac{\sigma_{12}^+ - \sigma_{12}^-}{\delta_2},$$
$$\rho' \frac{d}{dt}\frac{\sigma_{22}^+ + \sigma_{22}^-}{2} = (\lambda' + 2\mu')\frac{v_2^+ - v_2^-}{\delta_2}, \tag{3}$$
$$\rho' \frac{d}{dt}\frac{\sigma_{12}^+ + \sigma_{12}^-}{2} = \mu'\frac{v_1^+ - v_1^-}{\delta_2}.$$

Здесь v_1, v_2 – компоненты скорости перемещений, σ_{11}, σ_{22}, σ_{12} – компоненты тензора напряжений, λ, μ – параметры Ламе, ρ – плотность; штрихами обозначены константы для прослоек. Толщина прослоек в обоих направлениях считается одинаковой $\delta = \delta_1 = \delta_2$. Знаками «+» и «–» отмечены значения скоростей и напряжений на границах прослойки.

Данная модель является термодинамически согласованной и для нее можно выписать закон сохранения энергии как сумму кинетических и потенциальных энергий всех блоков и прослоек [Sadovskii, Sadovskaya, 2015].

В работе рассматривается краевая задача для блочного массива, закрепленного по границам. Численное решение ищется в области $\Omega = [0, L_1]\times[0, L_2]$, которая разбивается на равномерную сетку из $N_1\times N_2$ узлов. На границе $x_1 = 0$ в точке $x_2 = x_{\mathrm{imp}}$ задается воздействие в виде импульса давления $\sigma_{11}(t, x_{\mathrm{imp}}) = p(t)$.

Численный метод решения уравнений в блоках основан на методе двуциклического расщепления по пространственным переменным. Данный метод позволяет достичь второго порядка сходимости, когда расщепленные одномерные задачи решаются схемами порядка не ниже второго [Марчук, 1988]. Для решения одномерных задач применяется схема Годунова с предельной реконструкцией инвариантов Римана, позволяющей достичь второго порядка сходимости на монотонных участках решения [Куликовский и др., 2001]. В качестве альтернативы можно также воспользоваться схемой Иванова с контролируемой схемной диссипацией [Иванов и др., 2002]. Данная схема в ее бездиссипативном варианте или при достаточно малом параметре диссипации обладает вторым порядком сходимости, более того, схема является безусловно устойчивой.

Уравнения в прослойках решаются по бездиссипативной схеме Иванова. Для отсутствия схемной диссипации необходимо потребовать, чтобы сумма величин на верхнем (обозначено «крышкой») и нижнем шагах по времени была равна сумме граничных величин:

$$v^+ + v^- = \hat{v} + v, \qquad \sigma^+ + \sigma^- = \hat{\sigma} + \sigma.$$

Исходя из этого требования строится схема, и в итоге на шаге предиктор решается система [Sadovskii, Sadovskaya, 2018]:

$$I^+ = \rho c v^+ + \sigma^+, \qquad I^- = \rho c v^- - \sigma^-,$$
$$v^+ - v^- = \delta \frac{I^+ - I^- - 2\sigma}{\tau\rho' c^2 + \delta\rho c}, \qquad \sigma^+ - \sigma^- = \delta\rho' \frac{I^+ + I^- - 2\rho c v}{\rho'\delta + \rho c\tau},$$
$$v^+ + v^- = \frac{I^+ + I^- - (\sigma^+ - \sigma^-)}{\rho c}, \qquad \sigma^+ + \sigma^- = I^+ - I^- - \rho c(v^+ - v^-).$$

Здесь I^+ и I^- – инварианты Римана, посчитанные на границах соседних блоков, разделенных прослойкой, τ и h – шаги по времени и по пространству соответственно. На шаге корректор имеем уравнения:

$$\hat{v} = v + \frac{\tau}{\rho h}(\sigma^+ - \sigma^-), \qquad \hat{\sigma} = \sigma + \frac{\tau\rho c}{h}(v^+ - v^-).$$

Схема записывается для продольных и поперечных волн, распространяющихся со скоростями $c = c_p$ и $c = c_s$. Для решения в прослойках выделяются одномерные массивы в каждом из направлений. То есть при решении одномерных расщепленных задач напряжения и скорости деформации в прослойке вычисляются лишь в одном узле вычислительной сетки.

Для учета диссипации механической энергии рассмотрим вязкоупругие прослойки, описываемые моделью Пойнтинга–Томсона (моделью стандартного линейного тела). Реологическая схема модели материала изображена на рис. 1 и представляет собой последовательное соединение упругого элемента b_0 с параллельно расположенными вязким элементом η и упругим b. Соединив множество таких механизмов параллельно между собой, получим обобщенную модель стандартного линейного тела. Она широко применима в геофизике, поскольку хорошо описывает среды с постоянной добротностью в определенном частотном диапазоне, и чем больше механизмов в модели, тем точнее можно приблизиться к постоянной добротности. Параметры модели с одним механизмом также можно оптимизировать, чтобы добротность была как можно ближе к постоянной величине, но уже с гораздо меньшей точностью.

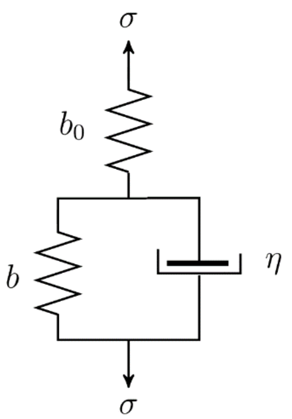

Рис. 1. Реологическая схема Пойнтинга–Томсона.

Запишем систему уравнений в прослойке для одного из направлений:

$$\begin{gathered}
\rho' \frac{d}{dt} \frac{v^+ + v^-}{2} = \frac{\sigma^+ - \sigma^-}{\delta}, \\
\frac{1}{b_0} \frac{d}{dt} \frac{\sigma^+ + \sigma^-}{2} = \frac{v^+ - v^-}{\delta} - \frac{1}{\eta}\left(\frac{\sigma^+ + \sigma^-}{2} - \frac{s^+ + s^-}{2}\right), \\
\frac{1}{b} \frac{d}{dt} \frac{s^+ + s^-}{2} = \frac{1}{\eta}\left(\frac{\sigma^+ + \sigma^-}{2} - \frac{s^+ + s^-}{2}\right).
\end{gathered} \tag{4}$$

Коэффициент упругости b принимает значения $\lambda+2\mu$ для продольных волн и μ для поперечных волн, аналогично b_0 равно либо $\lambda_0+2\mu_0$, либо μ_0. Напряжение s соответствует напряжению на упругом элементе b.

Данная модель также может быть записана в эквивалентной форме в терминах релаксационного модуля и времен релаксации деформации и напряжений. Удобство состоит в том, что можно определить времена релаксации по заданной добротности, воспользовавшись тау-методом [Blanch et al., 1995]. По известным временам релаксации пересчитываются модули упругости и коэффициент вязкости.

Разностная схема строится аналогичным образом, но имеет более громоздкий вид:

$$\begin{gathered}
v^+ - v^- = \frac{1}{\alpha}\left(\beta(I^+ - I^-) - 2\sigma - \frac{b_0 \tau}{2(2\eta + b\tau)} s\right), \\
\sigma^+ - \sigma^- = \frac{\rho' \delta}{\rho' \delta + \rho c \tau}(I^+ + I^- - 2\rho c v), \\
v^+ + v^- = \frac{I^+ + I^- - (\sigma^+ - \sigma^-)}{\rho c}, \qquad \sigma^+ + \sigma^- = I^+ - I^- - \rho c (v^+ - v^-), \\
s^+ + s^- = \frac{b\tau}{2(2\eta + b\tau)}(\sigma^+ - \sigma^-) + \frac{\eta}{2\eta + b\tau} s, \\
\hat{v} = v + \tau \frac{\sigma^+ - \sigma^-}{\delta \rho'}, \qquad \hat{\sigma} = \sigma + b_0 \tau \frac{v^+ - v^-}{\delta} - \frac{b_0 \tau}{\eta}\left(\frac{\sigma^+ + \sigma^-}{2} - \frac{s^+ + s^-}{2}\right), \\
\hat{s} = s + \frac{b\tau}{\eta}\left(\frac{\sigma^+ + \sigma^-}{2} - \frac{s^+ + s^-}{2}\right),
\end{gathered}$$

где

$$\alpha = \frac{b_0 \tau}{\delta} + \rho c + \frac{b_0 \tau \rho c}{2\eta}\left(1 - \frac{b\tau}{2\eta + b\tau}\right), \qquad \beta = 1 + \frac{b_0 \tau}{2\eta}\left(1 - \frac{b\tau}{2\eta + b\tau}\right).$$

Приведенные ниже результаты расчетов проводились на вычислительных системах кластерной архитектуры. Комплекс программ написан при использовании библиотеки MPI (Message Passing Interface). Каждый отдельный процесс обрабатывает отдельный макроблок, который в свою очередь разбивается на более мелкие блоки. Есть возможность задавать различную толщину прослоек между блоками и макроблоками.

РЕЗУЛЬТАТЫ ЧИСЛЕННЫХ ЭКСПЕРИМЕНТОВ

Оценим поведение волнового поля при прохождении вблизи границ блоков. Для этого рассмотрим среду, состоящую из четырех блоков, размер каждого 24×24 м, толщина прослоек между блоками варьируется. Сначала рассмотрим случай, когда прослойки и блоки состоят из одного и того же материала $\rho = \rho' = 2400$ кг/м^3, $c_p = c_p' = 4500$ м/с, $c_s = c_s' = 2700$ м/с. Мгновенный импульс давления $p(t) = p_0$ приложен в точке на поверхности первого блока вблизи прослойки $x_{imp} = 21$ м. На рисунках 2–4 приведены картины волновых полей, вычисленных на равномерной сетке $N_1 \times N_2 = 480 \times 960$ узлов (шаг $h = 0.5$ м). Вначале рассматривается модель, динамика прослоек которых описывается так же, как и в блоках, т. е. уравнениями теории упругости. В такой ситуации волны распространяются как в однородной среде (рис. 2).

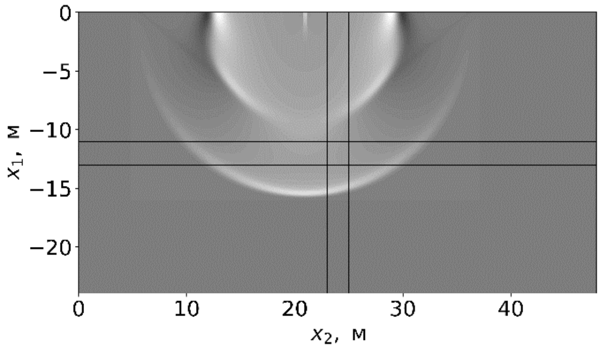

Рис. 2. Линии уровня скорости v_1 в среде с блоками и прослойками толщиной δ = 2 м из одинакового материала, прослойки описываются уравнениями теории упругости.

На рисунке 3 показаны картины волновых полей для среды с прослойками, описываемыми уравнениями (2)–(3).

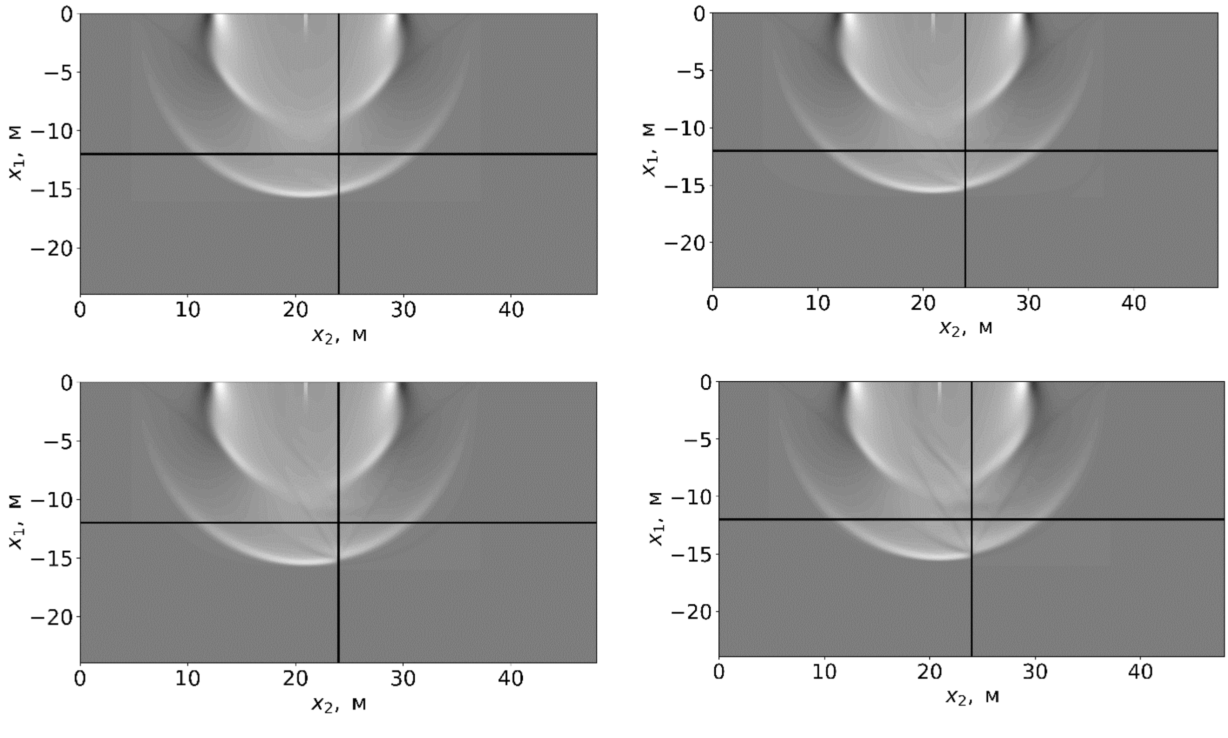

Рис. 3. Линии уровня скорости v_1 в среде с блоками и прослойками из одинаковых материалов, толщина прослоек δ = 0.025 м (слева вверху), 0.05 м (справа вверху), 0.1 м (слева внизу), 0.2 м (справа внизу), прослойки описываются упрощенной моделью (2)–(3).

По мере увеличения толщины прослоек все больше проявляются негативные эффекты в виде частичного отражения волн от вертикальной прослойки. Отражений от горизонтальной прослойки не наблюдается, поскольку волна проходит через нее под углом, близким к прямому.

Рассмотрим среду такой же конфигурации с прослойками из более податливого материала: ρ' = 2100 кг/м^3, c_p' = 2900 м/с, c_s' = 1700 м/с. В этом случае не наблюдается визуальных отличий между волновыми картинами, полученными для различных моделей прослоек (рис. 4).

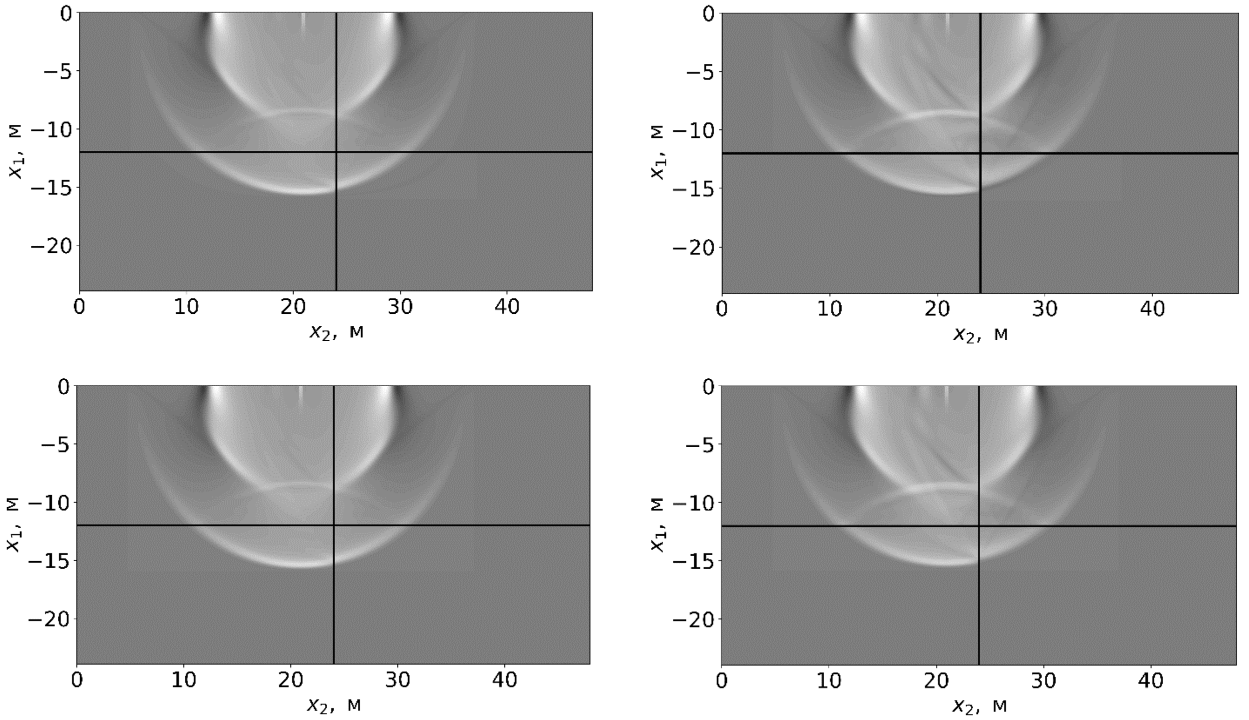

Рис. 4. Линии уровня скорости v_1 в среде с податливыми прослойками толщиной δ = 0.05 м (слева) и 0.2 м (справа), для модели прослоек (2)–(3) (вверху), для прослоек, описываемых уравнениями теории упругости (внизу).

Оценим погрешность решения, полученного для модели прослоек (2)–(3), относительно эталонного решения, полученного для прослоек, описываемых полными уравнениями теории упругости. Относительная погрешность err_2 численного решения $U = (v_1, v_1, \sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{12})$ вычислена в дискретном аналоге нормы пространства $L_\infty(0,T;\, L_2(\Omega))$:

$$\|U\| = \sup_{0<t<T} \sqrt{\iint\limits_{\Omega} \left(\rho \frac{v_1^2 + v_2^2}{2} + W\right) dx_1 dx_2},$$

где T – время, за которое волна достигает границы вычислительной области Ω, W – упругий потенциал, вычисляемый по формуле:

$$W = \mu(\sigma_{11}^2 + \sigma_{22}^2 + 2\sigma_{12}^2) - \frac{4\lambda\mu}{3\lambda + 2\mu}\sigma_0^2, \qquad \sigma_0 = (\sigma_{11} + \sigma_{22})/2.$$

Также используется дискретный аналог нормы $L_\infty(0,T;\, C(\Omega))$:

$$\|U\| = \sup_{0<t<T} \max_{\Omega} |U|,$$

в котором вычислена относительная погрешность err_C. В таблице 1 приведены относительные погрешности, вычисленные в различных нормах, в зависимости от шага регулярной сетки h при фиксированной толщине прослоек. Материал блоков во всех измерениях имеет параметры ρ = 2400 кг/м^3, c_p = 4500 м/с, c_s = 2700 м/с, материал прослоек варьируется.

Таблица 1

Относительные погрешности в зависимости от параметра сетки при толщине прослоек δ = 0.1 м

Параметры материала прослойки		$\rho' = \rho$, $c_p' = c_p$, $c_s' = c_s$		ρ' = 1100 кг/м^3, c_p' = 1500 м/с, c_s' = 800 м/с		ρ' = 2100 кг/м^3, c_p' = 2900 м/с, c_s' = 1700 м/с	
h, м	δ/h	err_2	err_C	err_2	err_C	err_2	err_C
0.1	1	0.0352	0.272	0.0231	0.0715	0.0303	0.123
0.05	2	0.0483	0.321	0.0258	0.0839	0.0286	0.144
0.025	4	0.0621	0.348	0.0309	0.115	0.0357	0.146
0.0125	8	0.0802	0.350	0.0475	0.131	0.0503	0.153

В таблице 2 показаны относительные погрешности в зависимости от толщины прослойки при фиксированной сетке для тех же материалов блоков и прослоек.

Таблица 2

Относительные погрешности в зависимости от толщины прослоек при фиксированной сетке $N_1 \times N_2$ = 960×1920 (h = 0.025 м)

Параметры материала прослойки		$\rho' = \rho$, $c_p' = c_p$, $c_s' = c_s$		ρ' = 1100 кг/м^3, c_p' = 1500 м/с, c_s' = 800 м/с		ρ' = 2100 кг/м^3, c_p' = 2900 м/с, c_s' = 1700 м/с	
δ, м	δ/h	err_2	err_C	err_2	err_C	err_2	err_C
0.025	1	0.0195	0.154	0.0177	0.0597	0.0117	0.0756
0.05	2	0.0362	0.250	0.0197	0.0704	0.0211	0.108
0.1	4	0.0621	0.348	0.0309	0.115	0.0357	0.146
0.2	8	0.1035	0.414	0.0689	0.237	0.0719	0.161

При росте соотношения толщины прослойки к шагу разностной сетки δ/h во всех случаях наблюдается рост погрешности. Заметно, что в средах с более податливыми прослойками погрешность немного ниже.

Пусть $v_1(x_1, x_2)$ – решение для сред с прослойками, описываемыми уравнениями (2)–(3), $v_{1e}(x_1, x_2)$ – эталонное решение. На рисунке 5 показано распределение погрешности $|v_1 - v_{1e}|/v_{1e}$ в блочных средах для прослоек разной толщины на равномерной сетке $N_1 \times N_2$ = 960×1920 (шаг h = 0.025 м).

Верификация математической модели проводилась по экспериментальным данным, опубликованным в работе [Сарайкин и др., 2015]. В одном из экспериментов на двуосном стенде блочно-слоистая среда моделировалась блоками из оргстекла (ρ = 2040 кг/м^3, c_p = 2670 м/с) размерами 89×125×250 мм, разделенными резиновыми прослойками толщиной 5 мм с модулями сдвига в направлениях x_1 и x_2 равными $10^7/1.3$ и $1.35 \cdot 10^7/1.3$ Па соответственно. Блоки располагались в конфигурации 6×6 и закреплялись резиновой обкладкой толщиной 5 мм с модулем сдвига $0.6/1.3 \cdot 10^8$ Па. В численном эксперименте предполагалось, что модули сдвига прослоек соответствуют состоянию длительного воздействия на материал, когда деформированы оба элемента реологической схемы (рис. 1). Коэффициент Пуассона для всех материалов сборки принимался равном 0.3. Стержневой ударник генерировал упругие волны, соприкасаясь с поверхностью блока. На рисунке 6 изображена схема проведения численного эксперимента.

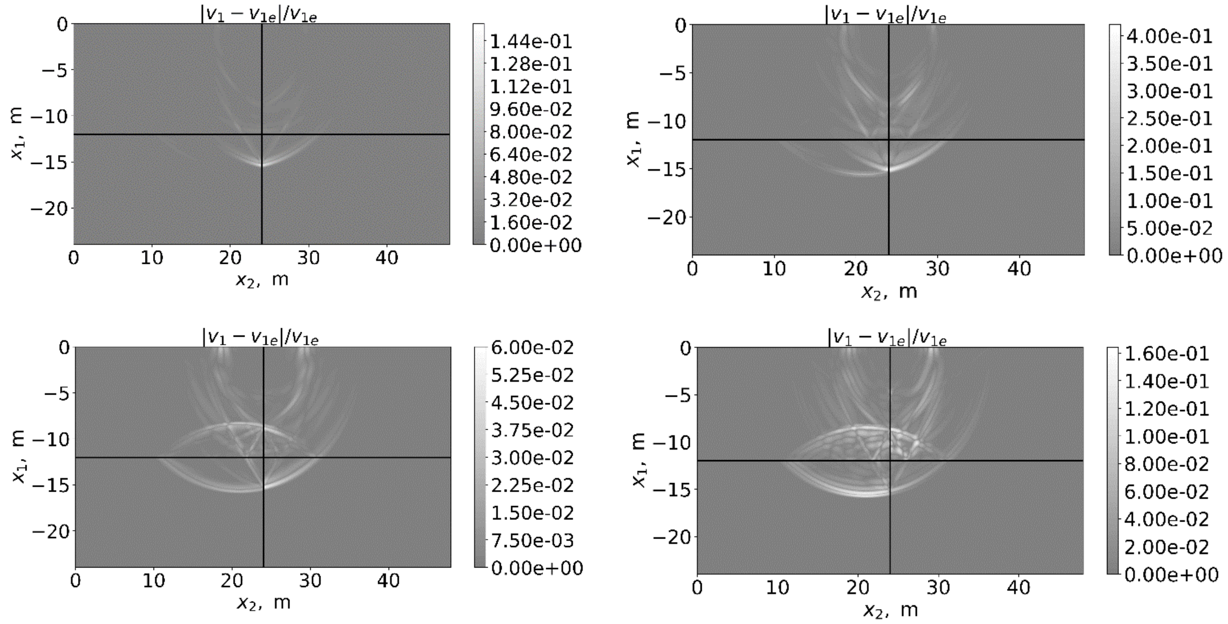

Рис. 5. Распределение погрешности решения в блочно-слоистой среде с толщиной прослоек δ = 0.025 м (слева), δ = 0.2 м (справа), материал прослоек $\rho' = \rho$, $c_p' = c_p$, $c_s' = c_s$ (сверху), более податливый материал прослоек ρ' = 2100 кг/м^3, c_p' = 2900 м/с, c_s' = 1700 м/с (снизу).

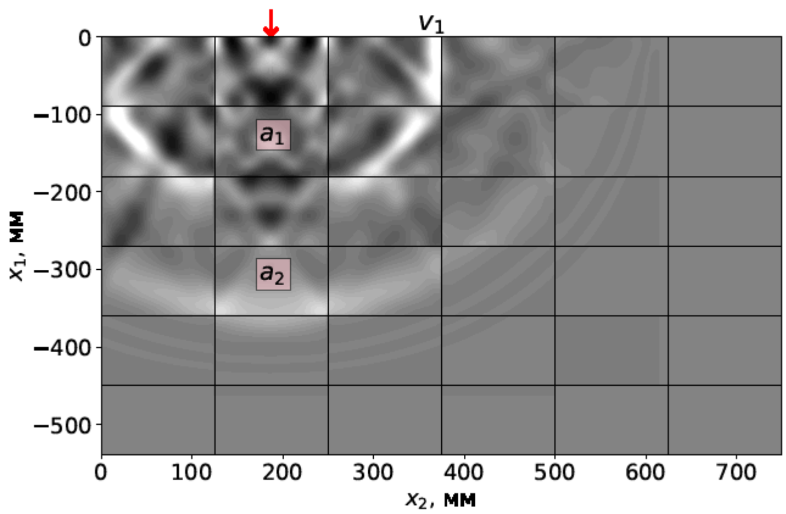

Рис. 6. Схема проведения численного эксперимента. Акселерометры a_1 и a_2 располагаются в серединах указанных блоков.

Ударное воздействие длительностью $T = 2{\cdot}10^{-4}$ с задавалось по формуле

$$p(t) = \begin{cases} p_0 \sin\left(\dfrac{\pi t}{T}\right), & 0 < t \le T, \\ 0, & t > T. \end{cases}$$

Акселерометрами a_1 и a_2 измерялись ускорения $w_i = \partial v_i / \partial t$ в серединах соответствующих блоков в течение 5 мс.

На рисунках 7–10 представлены графики из работы [Сарайкин и др., 2015] и графики, полученные в результате численного моделирования. Зависимости ускорения от времени, измеренные в ходе эксперимента, обозначены синей пунктирной линией, красные сплошные показывают ускорения, вычисленные по модели динамического взаимодействия блоков из той же статьи [Сарайкин и др., 2015]. Кривые зеленого цвета соответствуют расчетам, выполненным для модели среды с упругими блоками и вязкоупругими прослойками, описываемых уравнениями (4), с добротностью Q = 10.

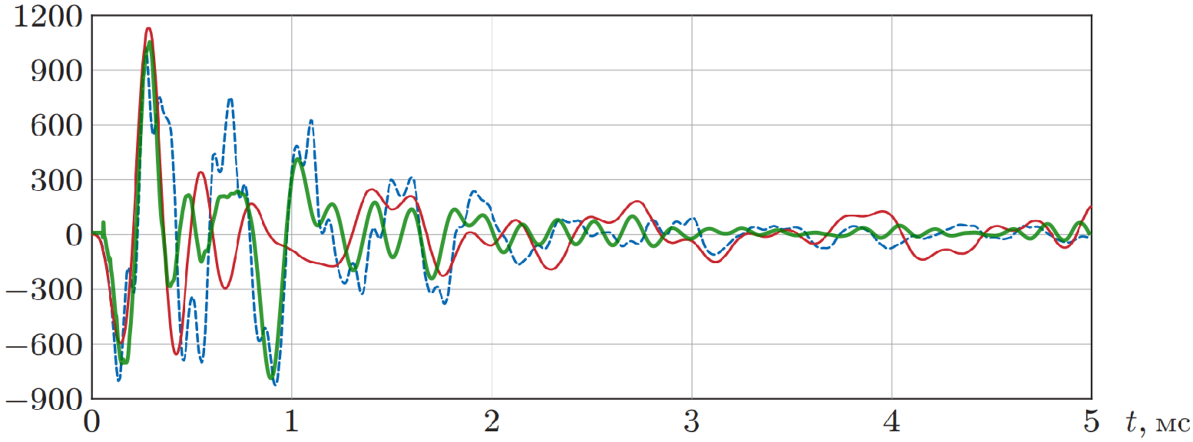

Рис. 7. Ускорение w_1, измеренное акселерометром a_1.

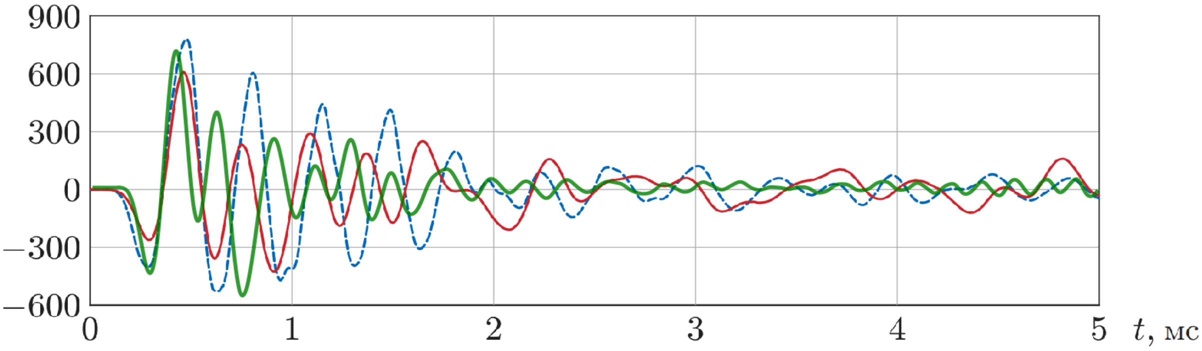

Рис. 8. Ускорение w_1, измеренное акселерометром a_2.

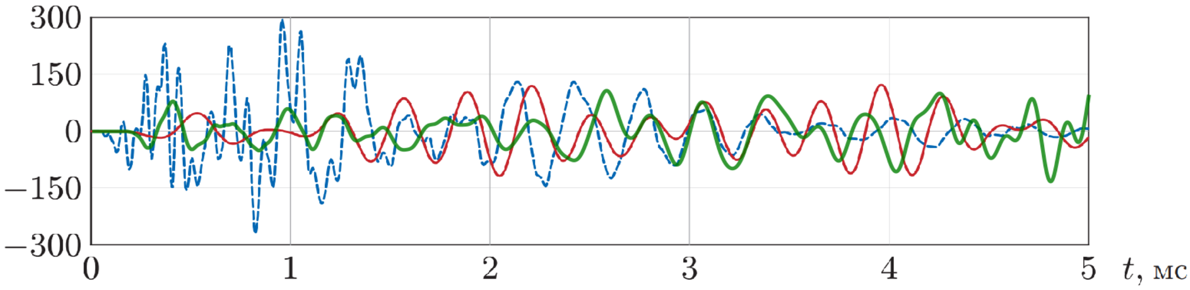

Рис. 9. Ускорение w_2, измеренное акселерометром a_1.

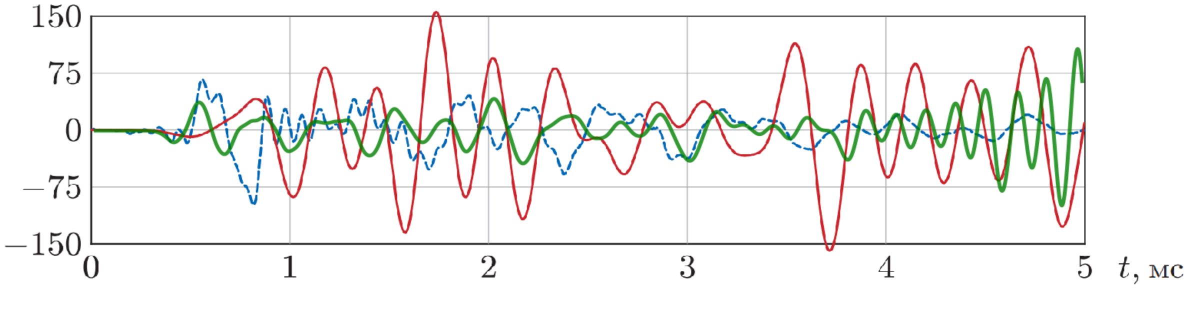

Рис. 10. Ускорение w_2, измеренное акселерометром a_2.

Результаты численного моделирования хорошо согласуются с экспериментальными данными. Ускорения, измеренные в блоке a_1, имеют низко- и высокочастотную составляющую, в блоке a_2 высокочастотные колебания быстро затухают. График ускорения на рис. 7 во многом повторяет экспериментальную кривую. На рисунке 8 заметно расхождение по фазе, но качественно ускорения согласуются. Более заметные расхождения с экспериментом наблюдаются на графиках с ускорением w_2 (рис. 9, 10). Вероятно, это связано с тем, что ускорения в двумерной модели не вполне соответствуют реально измеренным, поскольку в эксперименте акселерометры располагались на боковых гранях. Более точной в этом смысле была бы трехмерная модель блочной среды с расположением акселерометров как в эксперименте.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Рассматриваемая модель хорошо описывает волновые процессы, происходящие в блочно-слоистых средах. Волновые картины, полученные в результате расчетов по данной модели, вполне идентичны тем, что были получены в результате применения уравнений теории упругости для прослоек. Когда блоки и прослойки состоят из одного материала, тогда с увеличением толщины прослоек возникают нефизичные отражения. Верификация математической модели проведена по экспериментальным данным из работы [Сарайкин и др., 2015]. Расчеты показывают хорошее соответствие с экспериментом.

СПИСОК ИСТОЧНИКОВ

Александрова Н.И. Плоская задача Лэмба для двумерной дискретной среды // ДАН. 2015. Т. 460, № 1. С. 30–34. doi:10.7868/S0869565215010089.

Александрова Н.И., Шер Е.Н. Распространение волн в двумерной периодической модели блочной среды. Ч.1: Особенности волнового поля при действии импульсного источника // Физико-технические проблемы разработки полезных ископаемых. 2010. № 6. С. 57–68.

Иванов Г.В., Волчков Ю.М., Богульский И.О., Анисимов С.А., Кургузов В.Д. Численное решение динамических задач упругопластического деформирования твердых тел. Новосибирск: Сиб. унив. изд-во, 2002. 352 с.

Куликовский А.Г., Погорелов Н.В., Семенов А.Ю. Математические вопросы численного решения гиперболических систем уравнений. М.: Физматлит, 2001. 601 с.

Марчук Г.И. Методы расщепления. М.: Наука, 1988. 263 с.

Садовский М.А. Естественная кусковатость горной породы // ДАН СССР. 1979. Т. 247, № 4. С. 829–831.

Садовский М.А., Сардаров С.С. Соподчиненность и подобие геодвижений в связи с естественной кусковатостью пород // ДАН СССР. 1980. Т. 250, № 4. С. 846–848.

Садовский В.М., Садовская О.В., Похабова М.А. Моделирование упругих волн в блочной среде на основе уравнений континуума Коссера // Вычислительная механика сплошных сред. 2014. Т. 7, № 1. С. 52–60. doi:10.7242/1999-6691/2014.7.1.6.

Сарайкин В.А., Черников А.Г., Шер Е.Н. Распространение волн в двумерной блочной среде с вязкоупругими прослойками (теория и эксперимент) // Прикладная механика и техническая физика. 2015. Т. 56, № 4. С. 170–181. doi:10.15372/PMTF20150416.

Blanch J.O., Robertsson J.O.A., Symes W.W. Modeling of a constant *Q*; methodology and algorithm for an efficient and optimally inexpensive viscoelastic technique // Geophysics. 1995. Vol. 60. P. 176–184. doi:10.1190/1.1443744.

Sadovskii V.M., Sadovskaya O.V. Modeling of elastic waves in a blocky medium based on equations of the Cosserat continuum // Wave Motion. 2015. Vol. 52. P. 138–150. doi:10.1016/j.wavemoti.2014.09.008.

Sadovskii V.M., Sadovskaya O.V. Numerical algorithm based on implicit finite-difference schemes for analysis of dynamic processes in blocky media // Russian Journal of Numerical Analysis and Mathematical Modelling. 2018. Vol. 33 (2). P. 111–121. doi:10.1515/rnam-2018-0010.

REFERENCES

Aleksandrova N.I. The plane Lamb problem for a 2D discrete medium // Doklady Physics. 2015. Vol. 60. P. 5–10. doi:10.1134/S1028335815010012.

Aleksandrova N.I., Sher E.N. Wave propagation in the 2D periodical model of a block-structured medium. Part I: Characteristics of waves under impulsive impact // Journal of Mining Science. 2010. Vol. 46. P. 639–649. doi:10.1007/s10913-010-0081-y.

Blanch J.O., Robertsson J.O.A., Symes W.W. Modeling of a constant *Q*; methodology and algorithm for an efficient and optimally inexpensive viscoelastic technique // Geophysics. 1995. Vol. 60. P. 176–184. doi:10.1190/1.1443744.

Ivanov G.V., Volchkov Yu. M., Bogulskii I.O., Anisimov S.A., Kurguzov V.D. Numerical Solution of Dynamic Elastic-Plastic Problems of Deformable Solids [in Russian]. Sib. Univ. Izd. Novosibirsk, 2002. 352 p.

Kulikovskii A.G., Pogorelov N.V., Semenov A.Yu. Mathematical aspects of numerical solution of hyperbolic systems [in Russian]. Fizmatlit, Moscow, 2001. 601 p.

Marchuk G.I. Splitting methods [in Russian]. Nauka, Moscow, 1988. 263 p.

Sadovskii M.A. Natural lumpiness of a rock // Doklady Academii Nauk SSSR. 1979. Vol. 247 (4). P. 829–831.

Sadovskii M.A., Sardarov S.S. Coordination and similarity of the geomotions in connection with natural jointing of rocks // Doklady Academii Nauk SSSR. 1980. Vol. 250 (4). P. 846–848.

Sadovskii V.M., Sadovskaya O.V. Modeling of elastic waves in a blocky medium based on equations of the Cosserat continuum // Wave Motion. 2015. Vol. 52. P. 138–150. doi:10.1016/j.wavemoti.2014.09.008.

Sadovskii V.M., Sadovskaya O.V. Numerical algorithm based on implicit finite-difference schemes for analysis of dynamic processes in blocky media // Russian Journal of Numerical Analysis and Mathematical Modelling. 2018. Vol. 33 (2). P. 111–121. doi:10.1515/rnam-2018-0010.

Sadovskii V.M., Sadovskaya O.V., Pokhabova M.A. Modeling of elastic waves in a block medium based on equations of the Cosserat continuum // Computational Continuum Mechanics. 2014. Vol. 7. P. 52–60.

Saraikin V.A., Chernikov A.G., Sher E.N. Wave propagation in two-dimensional block media with viscoelastic layers (theory and experiment) // Journal of Applied Mechanics and Technical Physics. 2015. Vol. 56 (4). P. 688–697. doi:10.1134/S0021894415040161.

ИНФОРМАЦИЯ ОБ АВТОРАХ

ЕФИМОВ Евгений Александрович – инженер отдела вычислительной механики деформируемых сред Института вычислительного моделирования СО РАН. Основные научные интересы: вычислительная механика деформируемых сред.

САДОВСКИЙ Владимир Михайлович – доктор физико-математических наук, член-корреспондент РАН, заведующий отделом вычислительной механики деформируемых сред Института вычислительного моделирования СО РАН. Основные научные интересы: вычислительная механика деформируемых сред, математическое моделирование волновых процессов в реологически сложных средах, разрывные решения в упругопластических средах, вариационные неравенства.

Статья поступила в редакцию 14 декабря 2023 г.,
одобрена после рецензирования 15 января 2024 г.,
принята к публикации 18 января 2024 г.