



ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ ПРЯМОЙ ЗАДАЧИ МЕТОДА ПЕРЕХОДНЫХ ПРОЦЕССОВ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ НОВОЙ ФОРМУЛИРОВКИ УРАВНЕНИЙ МАКСВЕЛЛА

И.Н. Злыгостев^{1,✉}, С.И. Трашкеев², П.А. Стаценко³, Е.С. Хлыстун⁴

^{1,2,4}Институт нефтегазовой геологии и геофизики им. А.А. Трофимука СО РАН, 630090, Новосибирск, просп. Акад. Коптюга, 3, Россия,

^{2,3}Институт лазерной физики СО РАН, 630090, Новосибирск, просп. Акад. Лаврентьева, 15Б, Россия,

✉ Игорь Николаевич Злыгостев, ZlygostevIN@ipgg.sbras.ru, <https://orcid.org/0009-0006-1784-9002>

Аннотация. Предложен новый подход к решению прямой задачи нестационарной электродинамики в полной постановке для гетерогенной геологической среды. Новая формулировка уравнений Максвелла позволяет записать уравнения электромагнитного поля для потенциалов в виде системы уравнений гиперболического типа первого порядка. Информация о пространственном распределении удельной электропроводности в геологической среде содержится в электромагнитном отклике – реакции среды на внешнее электромагнитное воздействие.

Ключевые слова: электромагнитные импульсы, векторные и скалярные потенциалы, вектор индукции магнитного поля, проводящая неоднородность

Финансирование: работа выполнена в Институте нефтегазовой геологии и геофизики им. А.А. Трофимука СО РАН в рамках госзадания FWZZ-2022-0027 “Новые технологии внелабораторного химического анализа и контроля, прецизионных измерений физических полей природных и техногенных объектов” (приоритетное направление 1.5.1. Геофизика).

Для цитирования: Злыгостев И.Н., Трашкеев С.И., Стаценко П.А., Хлыстун Е.С. Численное решение прямой задачи метода переходных процессов с использованием новой формулировки уравнений Максвелла // Геофизические технологии. 2024. № 4. С. 64–74. doi:10.18303/2619-1563-2024-4-64.

NUMERICAL SOLUTION OF A DIRECT PROBLEM OF THE METHOD OF TRANSIENT SIGNALS USING A NEW FORMULATION OF MAXWELL'S EQUATIONS

I.N. Zlygostev^{1,✉}, S.I. Trashkeev², P.A. Statsenko³, E.S. Khlystun⁴

^{1,2,4}Trofimuk Institute of Petroleum Geology and Geophysics, SB RAS, Koptuyug Ave., 3, Novosibirsk, 630090, Russia,

^{2,3}Institute of Laser Physics, SB RAS, Lavrentiev Ave., 15B, Novosibirsk, 630090, Russia,

✉ Igor N. Zlygostev, ZlygostevIN@ipgg.sbras.ru, <https://orcid.org/0009-0006-1784-9002>

Abstract. A new approach to solving the direct problem of non-stationary electrodynamics in a complete formulation for a heterogeneous geological environment is proposed. The new formulation of Maxwell's equations makes it possible to write down the equations of the electromagnetic field for potentials in the form of a system of first-order hyperbolic type equations. Information about the spatial distribution of specific electrical conductivity in the geological environment is contained in the electromagnetic response – the reaction of the medium to external electromagnetic influence.

Keywords: electromagnetic pulses, vector and scalar potentials, magnetic field induction vector, conductive inhomogeneity

Funding: The work was carried out at the Trofimuk Institute of Petroleum Geology and Geophysics of the Siberian Branch of the Russian Academy of Sciences within the framework of the state assignment FWZZ-2022-0027 "New technologies for non-laboratory chemical analysis and control, precision measurements of physical fields of natural and man-made objects" (priority area 1.5.1. Geophysics).

For citation: Zlygostev I.N., Trashkeev S.I., Statsenko P.A., Khlystin E.S. Numerical solution of a direct problem of the method of transient signals using a new formulation of Maxwell's equations // Russian Journal of Geophysical Technologies. 2024. No. 4. P. 64–74. (In Russ.). doi:10.18303/2619-1563-2024-4-64.

ВВЕДЕНИЕ

Для исследования особенностей временного и пространственного распространения электромагнитных возмущений в неоднородных средах необходимо решать прямые задачи метода переходных процессов (МПП) в полной постановке на различных удалениях от источника.

Математическое моделирование импульсного вектора индукции магнитного поля (ВИМП), возбуждаемого вертикальным магнитным диполем (ВМД), позволяет оценить величину, пространственную и временную структуру отклика от геологической среды.

В статье предложен способ решения этой задачи, основанный на введении двух новых потенциалов. Такой подход устраняет необходимость учета неэволюционных условий в виде дивергенций от искомым полей [Кудрявцев, Трашкеев, 2013; Злыгостев и др., 2024].

Предложенный способ позволяет получить решение нестационарной задачи электродинамики в сложнопостроенной среде и в полной постановке с вычислением всех требуемых полей (электрического \mathbf{E} , магнитной индукции \mathbf{B} , плотности токов \mathbf{J} и т. д.) в любой точке пространства.

В результате последовательных преобразований получена система уравнений гиперболического типа первого порядка для потенциалов, эквивалентная классической [Кудрявцев, Трашкеев, 2013; Злыгостев и др., 2024].

Целью вычислительных экспериментов является исследование особенностей применения сверхкоротких импульсов для обнаружения небольшого контрастного проводящего объекта в слабопроводящей вмещающей среде.

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ

Математическая модель – система гиперболических уравнений первого порядка относительно модифицированных потенциалов с соответствующими краевыми, граничными и начальными условиями:

$$\left\{ \begin{array}{l} \varepsilon\varepsilon_0 \left(\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} + \nabla \varphi \right) - \operatorname{rot} \mathbf{S} = \mathbf{P}_{ex} - \sigma \mathbf{A}, \\ \mu\mu_0 \left(\frac{\partial \mathbf{S}}{\partial t} + \nabla \psi \right) + \operatorname{rot} \mathbf{A} = \mu\mu_0 \mathbf{M}_{ex}, \\ \frac{\varepsilon\mu}{c^2} \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \operatorname{div} \mathbf{A} = 0, \quad c^2 = \varepsilon_0\mu_0, \\ \frac{\varepsilon\mu}{c^2} \frac{\partial \psi}{\partial t} + \operatorname{div} \mathbf{S} = 0. \end{array} \right. \quad (1)$$

где φ и \mathbf{A} – классические потенциалы, ψ и \mathbf{S} – введенные, вспомогательные потенциалы, $\varepsilon = \varepsilon(\mathbf{r}, t)$ и $\mu = \mu(\mathbf{r}, t)$ – диэлектрическая и магнитная проницаемости среды, $\sigma = \sigma(\mathbf{r}, t)$ – электропроводность среды; c – скорость света в вакууме. Внешние источники заданы в виде плотности электрического \mathbf{P}_{ex} и магнитного \mathbf{M}_{ex} дипольных моментов.

Для выполнения условия непрерывности плотности токов и зарядов определяются в виде:

$$\begin{cases} \mathbf{j} = \frac{\partial \mathbf{P}_{ex}}{\partial t} + \text{rot} \mathbf{M}_{ex}, \\ \rho = -\text{div} \mathbf{P}_{ex}, \end{cases} \rightarrow \frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div} \mathbf{j} = 0. \quad (2)$$

Потенциалы, полученные при решении системы (1), однозначно определяют электрическое поле \mathbf{E} и вектор индукции магнитного поля \mathbf{B} .

Соотношения, определяющие поля \mathbf{E} и \mathbf{B} через векторный \mathbf{A} и скалярный φ потенциалы:

$$-\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \nabla \varphi = \mathbf{E}, \quad \text{rot} \mathbf{A} = \mathbf{B}. \quad (3)$$

В вычислительных экспериментах рассматривается гетерогенная среда, в которой задаются диэлектрическая проницаемость $\varepsilon = \varepsilon(\mathbf{r}, t)$, магнитная проницаемость $\mu = \mu(\mathbf{r}, t)$ и электропроводность $\sigma = \sigma(\mathbf{r}, t)$.

Эта математическая модель описывает распространение электромагнитных возмущений как в пространстве, так и по времени.

АЛГОРИТМЫ РЕШЕНИЯ

Для разработки эффективных алгоритмов решения прямых задач нестационарной электродинамики для широкого класса трехмерных моделей требуется два типа дискретизации: пространственная, в виде сеточного разбиения, и временная, в виде пошаговой временной схемы.

Дискретизация по пространству выполнена на прямоугольном разбиении, с размером ячейки h_x , h_y , h_z .

Компоненты векторов электрического поля и ВИМП вычислялись из векторного (\mathbf{A}) и скалярного (φ) потенциалов согласно (3). Для дифференцирования была использована центрально-разностная формула 4-го порядка точности.

Интегрирование по времени выполнялось с помощью метода Рунге–Кутты–Гилла 4-го порядка точности, требующего меньшей памяти для хранения вспомогательных массивов по сравнению со «стандартным» методом Рунге–Кутты 4-го порядка.

Для описания внешних неотражающих границ применялись две модели: диффузионного слоя и (или) PML-слоя, адаптированного к данной задаче [Злыгостев и др., 2024]. Perfectly matched layer (PML) – идеальный поглощающий слой – это искусственный поглощающий слой для волновых уравнений, обычно

используемый в численных методах для решения проблем с открытыми границами, особенно в методах FDTD (Finite-Difference Time-Domain) [Кудрявцев, Трашкеев, 2013; Злыгостев и др., 2024].

В принятой постановке не требуется дополнительного задания граничных условий на внутренних границах областей, достаточно явного вида зависимостей от пространства (в общем виде и от времени) величин проницаемостей и проводимости: $\varepsilon = \varepsilon(\mathbf{r}, t)$, $\mu = \mu(\mathbf{r}, t)$ и $\sigma = \sigma(\mathbf{r}, t)$ [Кудрявцев, Трашкеев, 2013; Злыгостев и др., 2024].

ОПИСАНИЕ МОДЕЛИ

В качестве расчетной области рассматривается пространство, состоящее из верхнего непроводящего полупространства (воздух) и нижнего однородного слабо проводящего полупространства (вмещающая среда) с контрастным объектом повышенной электропроводности. Введем декартову систему координат $\{X, Y, Z\}$ с осью OZ , направленной вверх. Плоскость XOY совпадает с границей между полупространствами. Проводящий объект представлен двухосным эллипсоидом (размеры $8 \times 2 \times 2$ м). Его центр находится на глубине -30 м, большая ось эллипсоида наклонена к оси OX под углом 10° .

На высоте 0.50 м от дневной поверхности над центром объекта расположен источник – вертикальный магнитный диполь (ВМД) (круглый тор диаметром 1 м, в сечении – круглый проводник диаметром 0.30 м). Область расчета: прямоугольная призма с размерами $15 \times 15 \times 45$ м. Высота атмосферы в области расчета – 5 м. Упрощенный вид модели с расположением точек измерения приведен на рис. 1, 2.

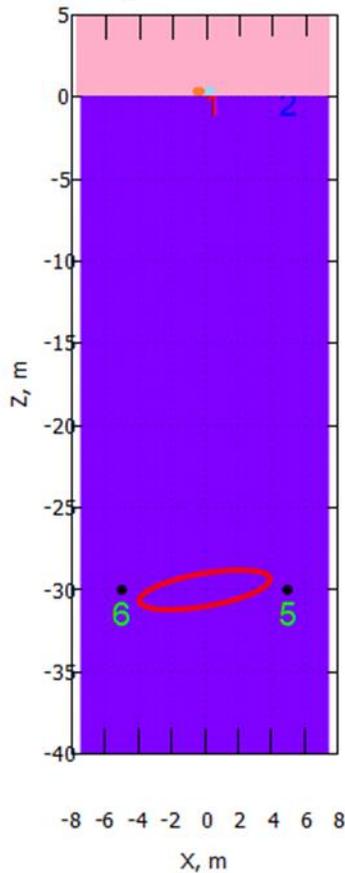


Рис. 1. Сечение XZ модели. Цифрами обозначены точки измерения.

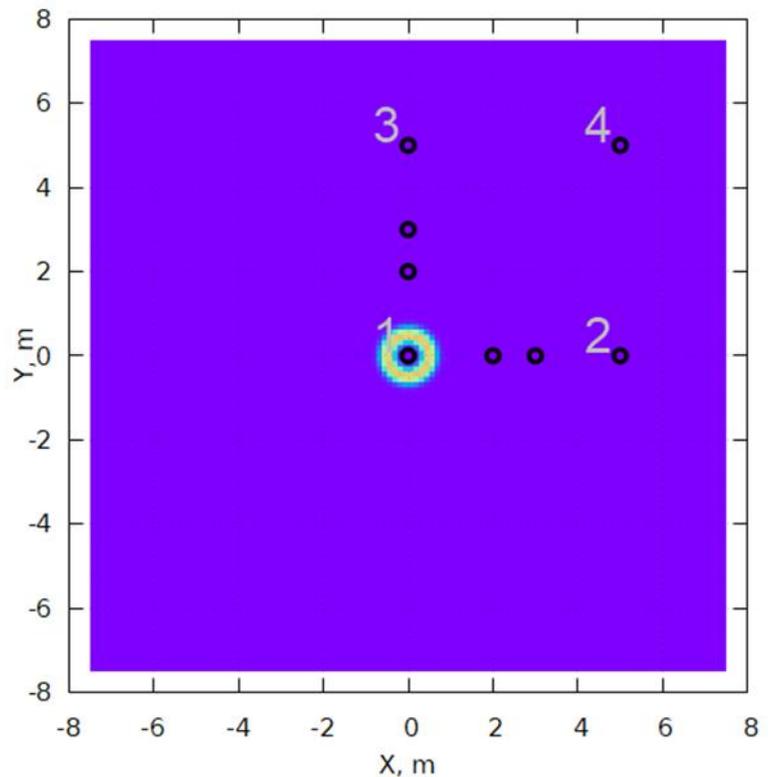


Рис. 2. Сечение XY модели. Цифрами обозначены точки измерения на дневной поверхности.

Модель 1

Атмосфера: $\varepsilon = \varepsilon_0; \mu = \mu_0; \sigma = 0$ См/м;

Геологическая среда: $\varepsilon_{\text{отн}} = 14; \mu_{\text{отн}} = 1; \sigma = 0.001$ См/м (известняк, суглинок влажный [Физические свойства..., 1984]);

Объект: $\varepsilon_{\text{отн}} = 5; \mu_{\text{отн}} = \mu_0; \sigma = 0.5$ См/м (алевролит с вкраплениями [Физические свойства..., 1984]);

Излучатель: проводящее кольцо (тор), средний диаметр кольца – 1 м, диаметр кольцевого проводника – 0.30 м.

Распределение плотности тока в источнике описывается, в цилиндрической системе координат, следующим выражением:

$$j = A \cdot \exp\left(-\left(\frac{z}{w}\right)^2\right) \cdot \exp\left(-\left(\frac{r-r_0}{w}\right)^2\right), \quad (4)$$

где r_0 – средний радиус кольца; w – ширина гауссова распределения плотности тока кольцевого проводника по осям z и r , определяемая геометрией проводника; A – коэффициент нормировки (величина общего тока, протекающего через проводник, деленного на площадь сечения проводника кольца).

Зависимость тока, протекающего через кольцо, от времени определена из упрощенной модели, где кольцо представлено в виде сосредоточенной индуктивности (L), включенной в цепь (рис. 3), при замыкании ключа К.

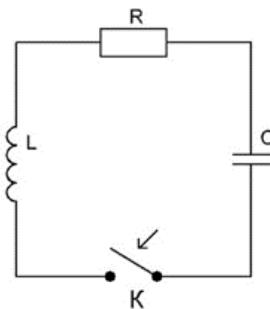


Рис. 3. Эквивалентная схема модели излучателя.

Значение индуктивности излучателя (962.984 нГн) определено путем численного расчета. Номиналы конденсатора С и резистора R выбраны из условия формирования затухающего импульса тока с длительностью 100 нс [Атабеков, 2009]. Для этой модели зависимость величины тока от времени описывается выражением [Атабеков, 2009]:

$$I(t) = -\frac{U}{L} t \cdot e^{-\delta t}, \quad (5)$$

где $\delta = R/2L$; U – начальное напряжение на конденсаторе.

Величина U выбрана из условия формирования тока, максимальная величина которого обеспечивает формирование ВИМП с максимальной величиной вертикальной компоненты B_z в центре кольца, равной 490 000 нТл. Время нарастания импульса тока – 22 нс, его длительность (на уровне 0.1) – 100 нс. Сетка равномерная, с шагом 0.125 м, число ячеек сетки – $120 \times 120 \times 360 = 5\,184\,000$.

Для вычисления частных производных на этой сетке использовался 5-точечный шаблон, который имеет 4-й порядок точности. Шаг по времени определялся из условия Куранта:

$$h_t = 0,5 \cdot \frac{1}{\sqrt{1/h_x^2 + 1/h_y^2 + 1/h_z^2}}, \quad (6)$$

Интегрирование по времени выполнялось методом Рунге–Кутты–Гилла 4-го порядка точности. Результаты расчетов приведены на рис. 4–12. Надпись в верхней части рисунка – координаты точки измерения (см. рис. 1, 2).

На рисунке 4 показана развертка импульса тока в кольце излучателя (правая ось ординат, А) и значения компонент ВИМП в центре кольца (левая ось ординат, Тл), ось абсцисс – время, нс.

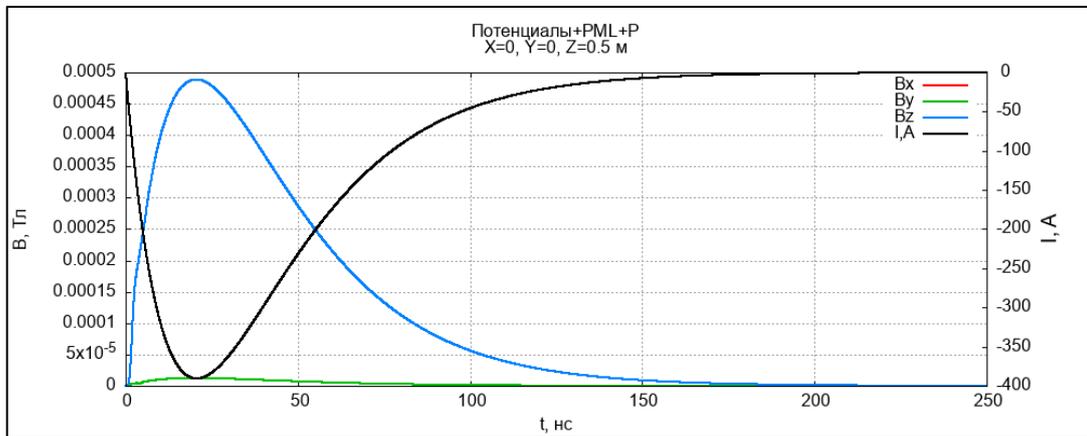


Рис. 4. Графики компонент В и тока в кольце излучателя.

На рисунках 5–12 показаны развертки остаточного тока в источнике и компонент ВИМП. Остаточный ток в источнике не превышает 0.004 А и становится близким к нулю на временах более 480 нс. Прямоугольниками выделены места резкого изменения (всплеска) компоненты B_x , обусловленные проводящим объектом.

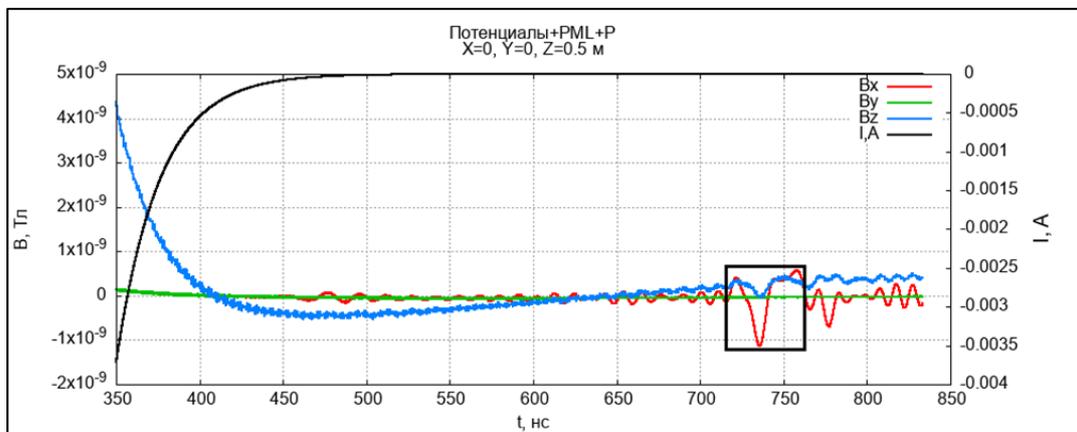


Рис. 5. Компоненты вектора В и остаточный ток в кольце излучателя. Величина резкого изменения $B_x = 1.80$ нТл.

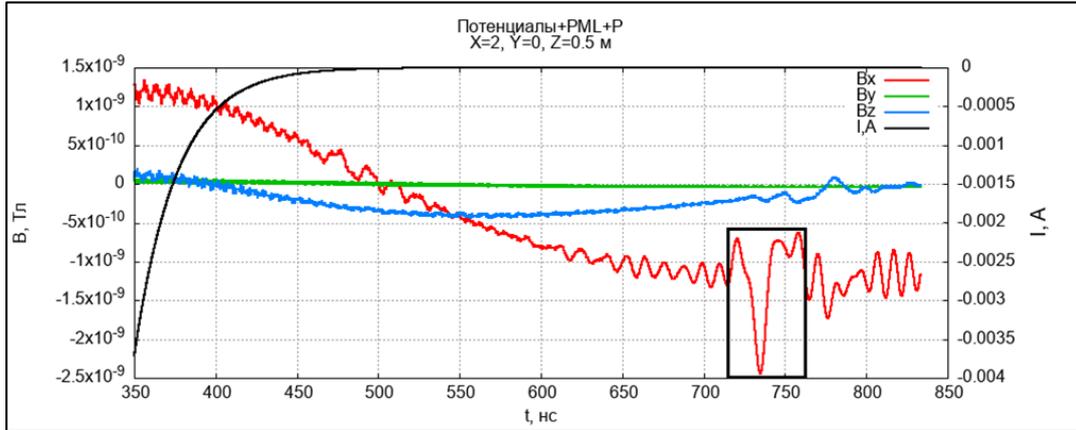


Рис. 6. Компоненты **B** и остаточный ток в кольце излучателя. Величина резкого изменения $B_x = 1.86$ нТл.

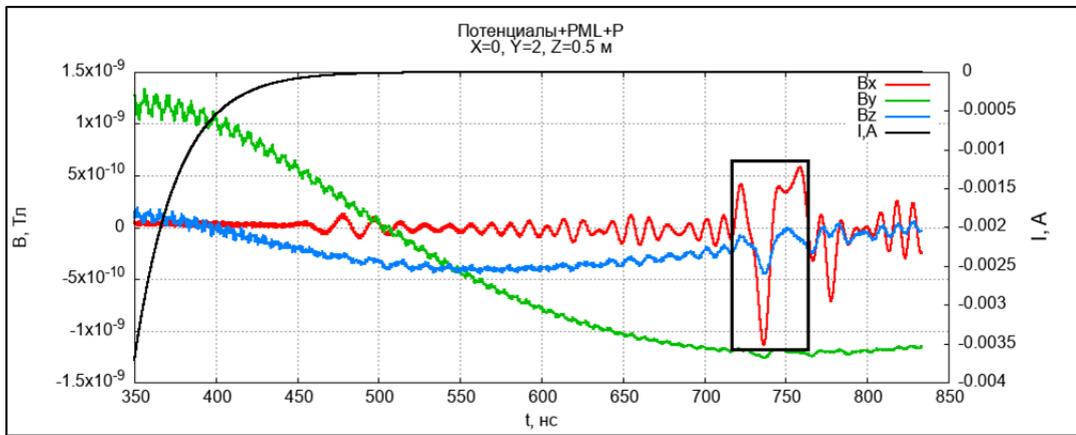


Рис. 7. Компоненты **B** и остаточный ток в кольце излучателя. Величина резкого изменения $B_x = 1.75$ нТл.

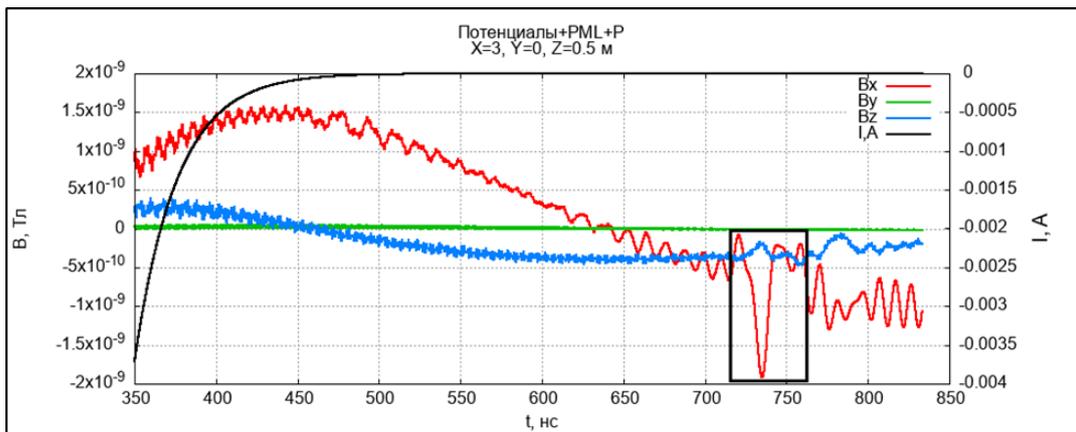


Рис. 8. Компоненты **B** и остаточный ток в кольце излучателя. Величина резкого изменения $B_x = 1.86$ нТл.

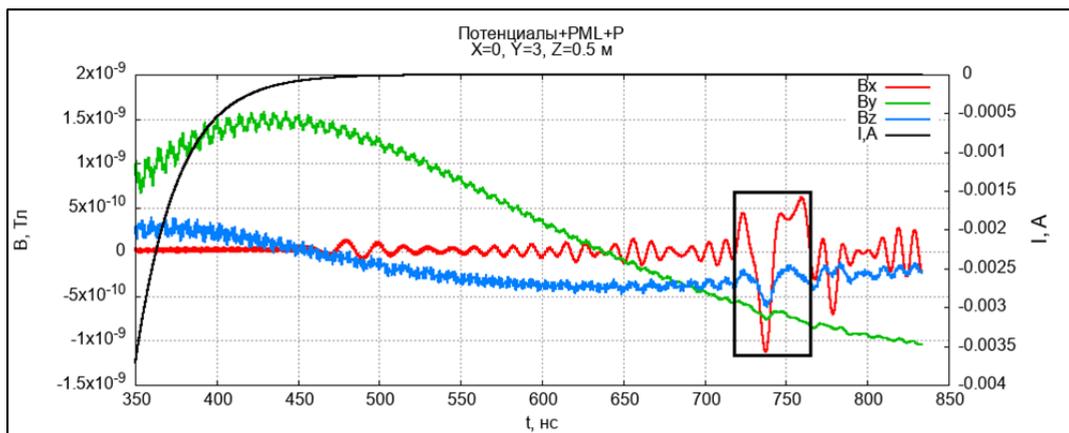


Рис. 9. Компоненты \mathbf{B} и остаточный ток в кольце излучателя. Величина резкого изменения $B_x = 1.78$ нТл.

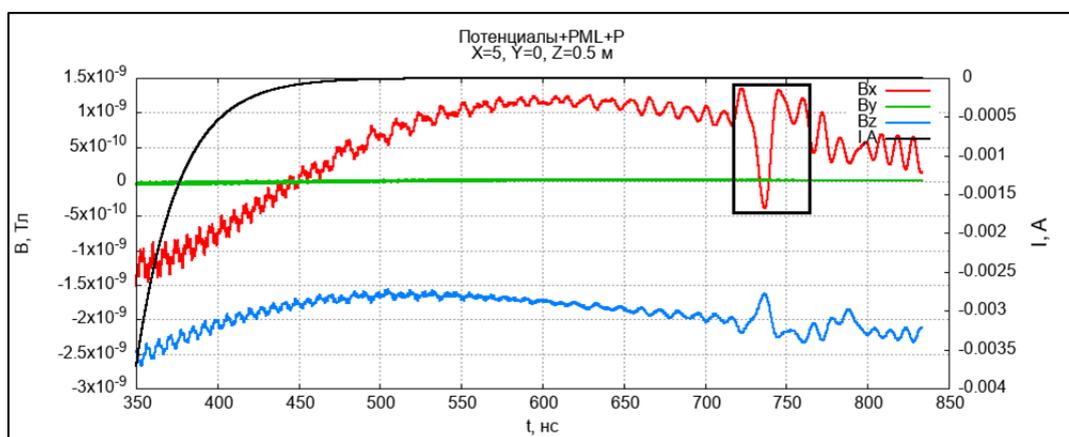


Рис. 10. Компоненты \mathbf{B} и остаточный ток в кольце излучателя. Величина резкого изменения $B_x = 1.80$ нТл.

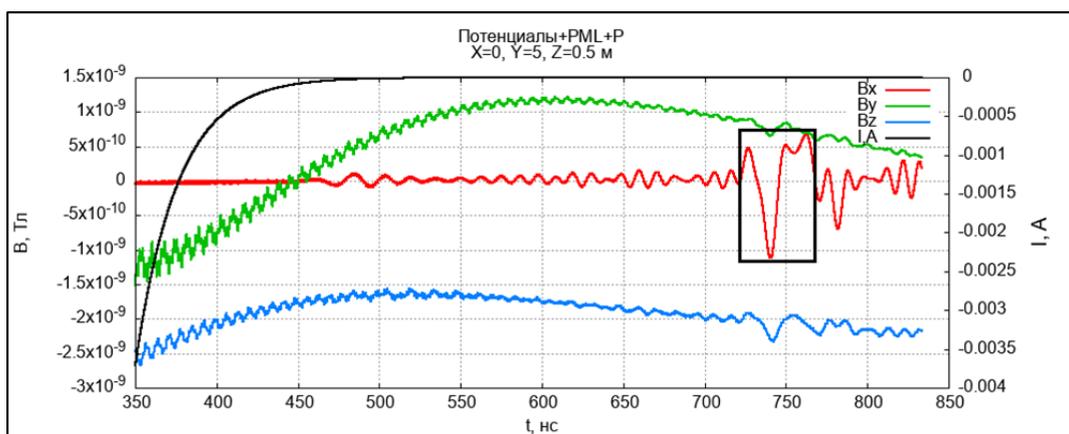


Рис. 11. Компоненты \mathbf{B} и остаточный ток в кольце излучателя. Величина резкого изменения $B_x = 1.80$ нТл.

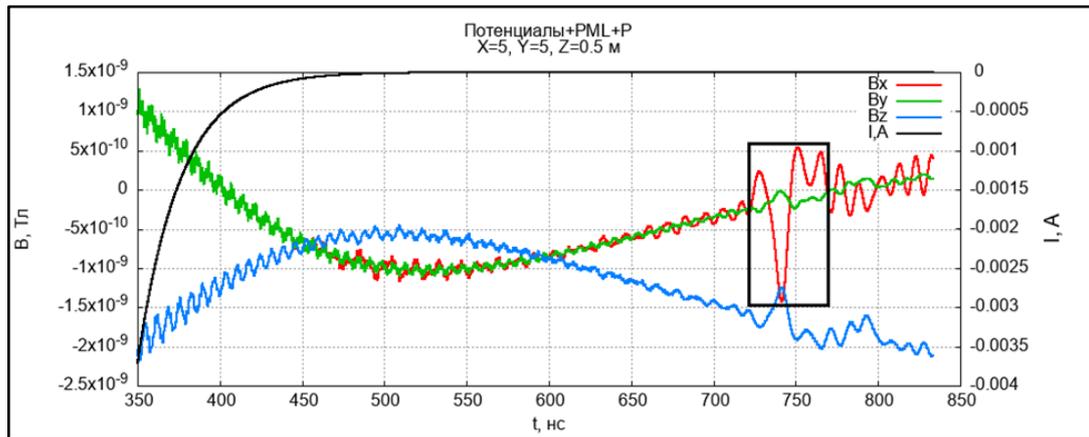


Рис. 12. Компоненты \mathbf{B} и остаточный ток в кольце излучателя. Величина резкого изменения $B_x = 2.00$ нТл.

Анализ полученных результатов позволяет сделать следующие выводы:

1. Основная информация о неоднородности содержится в горизонтальной компоненте B_x (1.60–2.00 нТл) на временах 720–780 нс. В различных точках наблюдения на временных развертках B_x четко выделяется область резкого изменения ее значений, имеющая характерный «импульсный» вид. Эффект связан с контрастным объектом. Во-первых, от границ объекта отражается электромагнитное возмущение. Во-вторых, дополнительно возникает «вторичное» поле, индуцированное затухающими вихревыми токами внутри объекта при изменении значения ВИМП во времени (во время прохождения магнитной составляющей электромагнитного возмущения через объект).
2. В этой же области времен можно выделить и значимые изменения компоненты B_z , появление и величина которых определяется, в основном, вихревыми токами в объекте.
3. Время первого вступления такого «импульса» находится в интервале от 718 до 732 нс, что соответствует времени прохождения электромагнитного возмущения в исследуемой среде по пути от источника до границы объекта и обратно, от границы объекта до точки измерения.

Скорость света в материальной среде равна [Ландау, Лифшиц, 1982]:

$$c_{cp} = \frac{c}{\sqrt{\epsilon\mu}}, \quad (7)$$

где ϵ – относительная диэлектрическая проницаемость среды; μ – относительная магнитная проницаемость среды; c – скорость света в вакууме (для рассматриваемой модели она равна 80 178 372 м/с).

4. Величина изменения компоненты B_x в выделенной (по времени) области составляет 1.5–2.0 нТл, что равно 4×10^{-6} от величины B_z в центре ВМД.

5. Для анализа формы принятого сигнала, необходимо наличие не менее пяти дискретных отсчетов, т. е. разрешающая способность измерителя по амплитуде должна составлять не более чем 0.2 от амплитуды измеряемого сигнала, а по времени – не более 5 нс.

6. При расположении точек измерения перпендикулярно большой оси эллипсоида (координата $X = 0$) компонента B_x имеет практически постоянное, близкое к нулю значение, вплоть до прихода возмущения.

7. При расположении точек измерения вдоль большой оси эллипсоида компонента B_x перед появлением импульса плавно изменяет свое значение.

Такое отличие поведения сигнала (в разных точках) можно использовать для грубой оценки формы проводящего объекта.

СПИСОК ИСТОЧНИКОВ

Атабеков Г.И. Теоретические основы электротехники. Линейные электрические цепи: Учебное пособие. СПб.: Изд-во «Лань», 2009. 592 с.

Злыгостев И.Н., Майоров А.П., Стаценко П.А., Трашкеев С.И., Хомяков М.Н., Диаб Хала. Формализм потенциалов в радиолокации // Акустооптические и радиолокационные методы измерений и обработки информации: Труды XVII Международной научно-технической конференции (Суздаль, 23–26 сентября 2024 г.). М.: НТЦ УП РАН, 2024. С. 80–84.

Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теоретическая физика: Учеб. пособие для вузов в 10 т. Том VIII: Электродинамика сплошных сред. М.: Главная редакция физ.-мат. литературы изд-ва «Наука», 1982. 621 с.

Кудрявцев А.Н., Трашкеев С.И. Формализм двух потенциалов для численного решения уравнений Максвелла // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2013. Т. 53, № 11. С. 1823–1834. doi:10.7868/S0044466913110100.

Физические свойства горных пород и полезных ископаемых (петрофизика): Справочник геофизика. М.: Недра, 1984. 455 с.

REFERENCES

Atabaykov G.I. Theoretical foundations of electrical engineering. Linear electric circuits. Textbook (In Russ.). Lan, St. Petersburg, 2009. 592 p.

Kudryavtsev A.N., Trashkeev S.I. Formalism of two potentials for the numerical solution of Maxwell's equations // Computational Mathematics and Mathematical Physics. 2013. Vol. 53 (11). P. 1653–1663. doi:10.1134/S0965542513110079.

Landau L.D., Lifshits E.M. Theoretical physics. Vol. VIII. Electrodynamics of continuous media (In Russ.). Chief Editorial of Physical and Mathematical Literature of the “Nauka”, Moscow, 1982. 621 p.

Physical properties of rocks and minerals (petrophysics): Geophysics handbook / Ed. N.B. Dortman (In Russ.). Nedra, Moscow, 1984. 455 p.

Zlygostev I.N., Mayorov A.P., Statsenko P.A., Trashkeev S.I., Khomyakov M.N., Diab Khala. Formalism of Potentials in Radar // Acoustooptic and Radar Methods for Information Measurements and Processing: Proceedings of the XVII International Scientific and Technical Conference (Suzdal, September 23–26, 2024) (In Russ.). STC UP RAS, Moscow, 2024. P. 80–84.

ИНФОРМАЦИЯ ОБ АВТОРАХ

ЗЛЫГОСТЕВ Игорь Николаевич – старший научный сотрудник лаборатории полевых аналитических и измерительных технологий Института нефтегазовой геологии и геофизики СО РАН. Основные научные интересы: электродинамика сплошных сред, распространение электромагнитного излучения, магнитометрия.

ТРАШКЕЕВ Сергей Иванович – доктор физико-математических наук, старший научный сотрудник лаборатории полевых аналитических и измерительных технологий Института нефтегазовой геологии и геофизики СО РАН и ведущий научный сотрудник лаборатории квантовых оптических технологий Института лазерной физики СО РАН. Основные научные интересы: нелинейная оптика, квантовая электродинамика, физика мягких сред, математическая физика, <https://orcid.org/0000-0001-5758-7138>.

СТАЦЕНКО Павел Анатольевич – научный сотрудник лаборатории мощных непрерывных лазеров Института лазерной физики СО РАН. Основные научные интересы: численное моделирование, математическая физика, нелинейная оптика, <https://orcid.org/0000-0002-5396-7990>.

ХЛЫСТУН Евгений Сергеевич – инженер лаборатории полевых аналитических и измерительных технологий Института нефтегазовой геологии и геофизики СО РАН. Основные научные интересы: электродинамика сплошных сред, силовая электроника, распространение электромагнитных волн, геолокация, <https://orcid.org/0000-0001-5439-3602>.

*Статья поступила в редакцию 9 января 2025 г.,
одобрена после рецензирования 13 января 2025 г.,
принята к публикации 14 января 2025 г.*