



## **ОСОБЕННОСТИ ОПЕРАТОРОВ ПРОДОЛЖЕНИЯ ВОЛНОВЫХ ПОЛЕЙ (НА ПРИМЕРЕ ПРОГНОЗИРОВАНИЯ ВОЛНЫ-СПУТНИКА)**

**М.С. Денисов, А.А. Егоров**

*ООО «ГЕОЛАБ», 119071, Москва, ул. Орджоникидзе, 12/4, Россия,*

*e-mail: denisovms@gmail.com*

Алгоритмы подавления волн-спутников задействуют процедуру продолжения волнового поля. Оператор такого преобразования является интегральным, а при применении к дискретным сейсмическим данным используется его аппроксимация, соответствующая численному способу интегрирования. В статье исследуются границы применимости аппроксимации по методу ячеек и методу прямоугольников. Показано, что при обработке площадных сейсмограмм, зарегистрированных при помощи традиционных схем наблюдения, корректное прогнозирование спутника возможно только после применения интерполяции. При обработке профильных сейсмограмм имеется возможность прогнозирования и удаления волн-спутников как при глубокой, так и при мелкой буксировке косы. Форма косы может быть произвольной. Результаты исследования и сделанные на его основании выводы справедливы не только для операторов прогнозирования волн-спутников, но и распространяются на все задачи сейсморазведки, в которых используются методы продолжения волновых полей.

*Морская сейсморазведка; продолжение волнового поля; численное интегрирование; волна-спутник*

## **PROPERTIES OF WAVEFIELD EXTRAPOLATION OPERATORS (ON THE EXAMPLE OF PREDICTION OF GHOST REFLECTIONS)**

**M.S. Denisov, A.A. Egorov**

*GEOLAB Ltd, Ordzhonikidze str., 12/4, Moscow, 119071, Russia,*

*e-mail: denisovms@gmail.com*

Seismic deghosting algorithms involve wavefield extrapolation. The operator of such a transformation is integral, and when applied to discrete seismic data, its approximation is used, which corresponds to a method of numerical integration. The paper examines the limits of applicability of the approximation by the method of cells and the method of rectangles. It is shown that when processing 3D seismograms recorded using traditional survey geometries, correct ghost prediction is possible only after interpolation. When processing 2D seismic gathers, it is possible to predict and remove ghost waves for deep and shallow streamers. The streamer shape can be arbitrary. The results of the study and the conclusions made are valid not only for ghost prediction operators, but also for all seismic exploration tasks that involve wavefield extrapolation.

*Marine seismic; wavefield extrapolation; numerical integration; ghost reflection*

## ВВЕДЕНИЕ

Волны-спутники являются помехой, возникающей при регистрации морских или наземных сейсмических данных [Боганик, Гурвич, 2006]. В морской сейсморазведке спутник представляет собой волну, претерпевшую переотражение от свободной поверхности. Различают спутник со стороны источника и спутник со стороны приемника. С первым вполне успешно справляются различные модификации схемы излучения волн, наиболее известной из которых является двухуровневое возбуждение [Гольдин, 1974]. Нас будет интересовать задача подавления спутника со стороны приемника.

В результате проведенного нами исследования [Денисов, Егоров, 2016а; Бурцев и др., 2016; Денисов, Егоров, 2016б] был предложен оптимизационный алгоритм, позволяющий производить подавление волн-спутников по площадным (3D) и профильным (2D) сейсмограммам для морских данных, полученных с произвольной геометрией глубоко буксируемой косы. Настоящая работа продолжает это исследование, обобщая результаты на случай мелкой буксировки косы и уточняя область применимости алгоритмов. Здесь мы не ставим перед собой цели написания литературного обзора на тему удаления волн-спутников. Достаточно полную информацию о современном состоянии задачи, включая алгоритмы, основанные на интегральных методах продолжения волнового поля (а именно такие и только такие операторы волновых продолжений будут нас интересовать), можно найти в работах [Beasley et al., 2013; Denisov et al., 2018]. Предметом нашего исследования являются способы численной реализации интегральных преобразований, а проблема волн-спутников затрагивается нами лишь с целью наглядной и геофизически содержательной иллюстрации наших выводов.

Читателю может показаться, что статья перегружена выкладками. Такой стиль подачи материала неизбежен и обусловлен тем, что перед нами стоит задача изучения особенностей математического аппарата, привлекаемого для решения различных задач обработки сейсмических данных. Известно множество алгоритмов, в которых явно или неявно используются интегральные операторы прямого и обращенного продолжения поля. Помимо подавления волн-спутников, к этим алгоритмам относятся прогнозирование кратных волн, коррекция уровня приведения, компенсация влияния верхней части разреза, сейсмическая миграция, погружение сейсмограмм, замещение слоя и пр. [Денисов, Силаенков, 2008].

Наш алгоритм основывается на модели волнового поля, связывающей полезные отражения  $w(x, t)$  (в данном случае к ним относятся все восходящие волны: как однократно отраженные, так и многократно отраженные) и спутники  $g(x, t)$ . Вывод модели детально описан в первой части исследования [Денисов, Егоров, 2016а], к которой мы и отсылаем читателя, интересующегося соответствующими подробностями. Алгоритм подавления спутника реализован в виде обращения модели относительно поля полезных волн. Здесь же мы приведем лишь необходимые краткие пояснения.

Пусть  $d(x, t)$  – сейсмограмма общего пункта возбуждения (ОПВ), которую представим в виде

$$d(x, t) = w(x, t) + g(x, t).$$

Введем декартову систему координат так, чтобы ось  $z$  была ортогональна поверхности наблюдений и направлена в глубь среды. Если мы имеем дело с площадной сейсмограммой, то под  $x$  понимаем вектор-

координату  $x = (x_1, x_2)$  проекции точки, в которой производится регистрация. Если сейсмограмма профильная, то  $x$  – координата точки приема на линии наблюдений.

Применив к последнему равенству преобразование Фурье по  $t$ , приходим к

$$D(x, \omega) = W(x, \omega) + G(x, \omega), \quad (1)$$

где  $D(x, \omega)$ ,  $W(x, \omega)$ ,  $G(x, \omega)$  – спектральные характеристики волновых полей  $d(x, t)$ ,  $w(x, t)$  и  $g(x, t)$  соответственно,  $\omega$  – циклическая частота. Для краткости, выражения типа *спектральная характеристика волнового поля* в дальнейшем (там, где это не приведет к путанице) будем заменять на *волновое поле*. Кроме того, с целью компактности записи формул будем применять упрощенные обозначения, не выписывая аргументы функций. При необходимости будем указывать аргументы, не делая при этом оговорок. Спектральные характеристики условимся записывать в предположении  $\omega \geq 0$ , а их форма при  $\omega < 0$  будет определяться из свойств симметрии спектров действительных функций [Оппенгейм, Шафер, 1979].

### ОБРАБОТКА ПЛОЩАДНЫХ СЕЙСМОГРАММ (ЗАДАЧА 3D)

Образование спутника со стороны приемника происходит следующим образом. Регистрируемое сейсмоприемниками на косе поле восходящих волн  $W$  распространяется до поверхности наблюдений и после переотражения в нижнее полупространство вновь регистрируется в виде падающих волн-спутников  $G$ . Поэтому модель спутника связана с полем полезных волн преобразованием вида прямого продолжения поля, и это продолжение осуществляется *вдоль семейства лучей* (терминология заимствована из книги [Петрашень, Нахамкин, 1973]) отраженной волны  $M$ , а именно:

$$G(x, \omega) = a \int \int_{b_1 b_2} W(b_1, b_2, \omega) K(b_1, b_2, x, \omega) db_1 db_2, \quad (2)$$

или с использованием упрощенного обозначения вектор-координаты  $b = (b_1, b_2)$

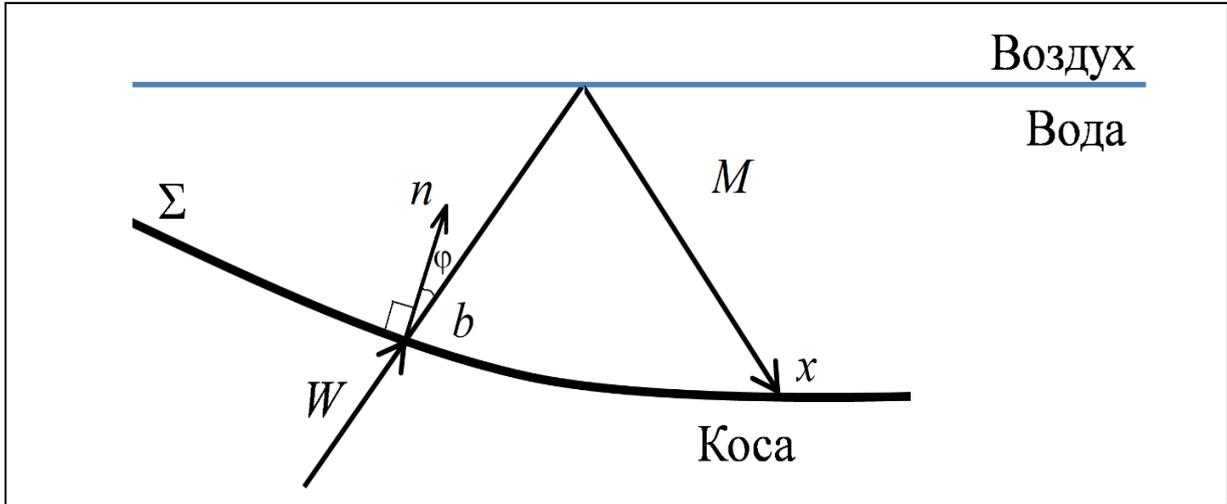
$$G(x, \omega) = a \int_{b \in \Sigma} W(b, \omega) K(b, x, \omega) db,$$

где

$$K(b, x, \omega) = -2 \frac{\partial}{\partial n} M(b, x, \omega), \quad (3)$$

$a$  – коэффициент отражения восходящей волны от поверхности моря ( $|a| \leq 1$ ,  $a \approx -1$ ),  $\Sigma$  – функция, описывающая геометрию косы,  $n$  – нормаль к  $\Sigma$  в точке интегрирования  $b = (b_1, b_2)$ ,  $aM(b, x, \omega)$  –

спектральная характеристика поля точечного источника, расположенного в точке с вектор-координатой  $b$  и наблюдаемого в точке  $x$ . Введенные условные обозначения иллюстрируются на рис. 1.



**Рис. 1.** Условная схема процесса образования волны-спутника со стороны приемника. Восходящая волна  $W$  регистрируется буксируемой сейсмической косой  $\Sigma$ , переотражается в нижнее полупространство от границы вода/воздух и вновь регистрируется в виде спутника. Луч связывает точки  $b$  и  $x$ .  $M$  – волна, по спектральной характеристике которой производится построение оператора продолжения поля

Так как (см. [Петрашень, 1959])

$$M(b, x, \omega) = \frac{1}{4\pi r(b, x)} e^{j\frac{\omega}{v}r(b, x)}, \quad (4)$$

где  $r(b, x)$  – путь, пройденный волной от точки  $b$  до точки  $x$ ,  $v$  – скорость упругих волн в воде,  $j = \sqrt{-1}$ , то, подставив (4) в (3), имеем

$$K(b, x, \omega) = -\frac{j\omega \cos \phi(b, x)}{2\pi v r(b, x)} e^{j\frac{\omega}{v}r(b, x)} \left( 1 + \frac{jv}{\omega r(b, x)} \right). \quad (5)$$

Функцию  $\tau(b, x) \equiv r(b, x)/v$  принято называть траекторией суммирования. При большом заглублении косы действие оператора (5) в пространственно-временной области сводится к взвешенному суммированию трасс исходного поля вдоль траектории  $\tau$  и последующей одноканальной фильтрации суммотрассы. При получении последнего выражения мы воспользовались следствием из закона Бендорфа [Урупов, Левин, 1985]:

$$\frac{\partial}{\partial n} r(b, x) = \cos \phi(b, x).$$

Опираясь на работу [Денисов, Егоров, 2016а], можно подставить в сумму (1) выражение (2) для волны-спутника  $G(x, \omega)$  и тем самым получить уравнение, в правой части которого будет находиться лишь  $W(x, \omega)$ . Отсюда для каждой фиксированной частоты  $\omega$  имеем систему линейных уравнений относительно искомой спектральной характеристики поля восходящих волн, решая которую получим очищенные от волны-спутника сейсмограммы.

Разумеется, выражение (2) не может быть применено непосредственно к зарегистрированному волновому полю, так как наблюдения производятся в дискретных точках на поверхности  $\Sigma$ , удаленных друг от друга на расстояние  $\Delta b_1$ , под которым понимается интервал между приемниками на косе, и на расстояние  $\Delta b_2$ , под которым понимается интервал между соседними косами. Во всех известных нам работах, посвященных прямым или обращенным продолжениям волновых полей, переход от интегральной формы записи преобразования к дискретной осуществляется без каких-либо оговорок. Авторы как бы считают само собой разумеющимся, что для применения преобразования к зарегистрированным данным формулу (2) следует просто заменить на

$$G(x, \omega) = a\Delta b_1\Delta b_2 \sum_m \sum_n W(m\Delta b_1, n\Delta b_2, \omega) K(m\Delta b_1, n\Delta b_2, x, \omega). \quad (6)$$

На наш взгляд, такой подход вовсе не очевиден и требует отдельных пояснений. Так как в литературе мы не встречаем необходимых в данном случае комментариев, а сам переход оказывается принципиально важным в решаемой задаче, то мы обсудим этот вопрос детально, т. е. более тщательно, чем, вероятно, следовало бы в иной ситуации. Впрочем, основной текст статьи содержит лишь наглядные и упрощенные рассуждения, в то время как более строгий вывод вынесен в Приложение. Легко понять, что формула (6) оказывается способом оценивания двойного интеграла (2) по методу ячеек [Калиткин, 1978], являющегося двумерным аналогом метода средних прямоугольников. Такой способ имеет свои ограничения, и мы их проанализируем.

Пусть поле  $W$  представляет собой горизонтально-плоскую волну, импульс которой имеет спектральную характеристику  $S(\omega)$ , и пусть  $\Sigma$  – плоскость. Тогда интеграл (2) с учетом (5) записывается как

$$G(x, \omega) = -aS(\omega) \frac{j\omega}{2\pi v} \int_{b_1} \int_{b_2} \frac{\cos \phi(b, x)}{r(b, x)} e^{j\frac{\omega}{v}r(b, x)} \left( 1 + \frac{jv}{\omega r(b, x)} \right) db_1 db_2. \quad (7)$$

Для дальнейших рассуждений нам удобно ввести новые обозначения, а именно переписать (7) в виде

$$G(x, \omega) = -aI(x, \omega),$$

где через  $I$  обозначен двойной интеграл

$$I(x, \omega) = S(\omega) \frac{j\omega}{2\pi v} \iint_{b_1 b_2} J(x, \omega, b_1, b_2) db_1 db_2$$

с подынтегральной функцией  $J$ , равной

$$J(x, \omega, b_1, b_2) = \frac{\cos \phi(b, x)}{r(b, x)} e^{j \frac{\omega}{v} r(b, x)} \left( 1 + \frac{jv}{\omega r(b, x)} \right).$$

Преобразование производит прямое продолжение поля с одного глубинного уровня на другой, а расстояние между уровнями равно  $2h$ , где  $h$  – глубина буксировки косы. Будем прогнозировать волну-спутник в точку с вектор-координатой  $x = 0$ :  $r(b, x) = r(b, x = 0) = \sqrt{(2h)^2 + b_1^2 + b_2^2}$ .

Основной вклад в интеграл вносит окрестность точки касания траектории суммирования и годографа волны, которая в нашем случае имеет координаты  $b_1 = b_2 = 0$ . Иначе говоря, для получения оценки функции  $I(x, \omega)$  достаточно провести интегрирование по половине первой зоны Френеля  $\Phi_1$  [Боганик, Гурвич, 2006], имеющей радиус

$$R_1 = \frac{1}{2} \sqrt{2h\lambda + \frac{\lambda^2}{4}},$$

где  $\lambda$  – длина волны, за которую мы примем длину волны гармоники, доминирующей в спектре сейсмического импульса  $S(\omega)$ . Для этого в интеграле следует выбрать область интегрирования  $b_1, b_2 \in \Phi_1$  такую, что

$$\sqrt{b_1^2 + b_2^2} \leq R_1, \quad (8)$$

т. е.

$$I(x, \omega) = S(\omega) \frac{j\omega}{2\pi v} \iint_{\Phi_1} J(x, \omega, b_1, b_2) db_1 db_2. \quad (9)$$

Рассчитаем погрешность оценивания интеграла, для чего введем понятие полной (т. е. для всех частот) относительной ошибки интегрирования  $\Omega$ . Обозначив через  $\tilde{I}(\omega) \equiv \tilde{I}(x = 0, \omega)$  оценку интеграла  $I(\omega) \equiv I(x = 0, \omega)$  по методу ячеек, записываемую в виде двойной суммы, аналогичной (6), вычислим суммарную энергию разности истинного значения и оценки для всех частот в пределах сигнального диапазона, после чего нормируем ее на энергию функции  $I(\omega)$  и извлечем квадратный корень:

$$\Omega = \sqrt{\frac{\int_0^{\pi} |I(\omega) - \tilde{I}(\omega)|^2 d\omega}{\int_0^{\pi} |I(\omega)|^2 d\omega}}. \quad (10)$$

Погрешность зависит от глубины буксировки и расстояний между сейсмоприемниками:  $\Omega = \Omega(h, \Delta b_1, \Delta b_2)$ , и именно эта функциональная зависимость будет изучена. Воспользуемся следующим простым соображением. Преобразование (9) точно реализует прямое продолжение поля горизонтально-плоской волны в однородном слое на глубину  $2h$ . Поэтому  $I(\omega)$  является спектральной характеристикой сигнала  $S(\omega)$ , в который введена временная задержка  $2h/v$ :

$$I(\omega) = S(\omega)e^{-j\omega\frac{2h}{v}}.$$

Отсюда следует, в том числе, что  $|I(\omega)| = |S(\omega)|$ . Выражение для ошибки аппроксимации (10) принимает вид

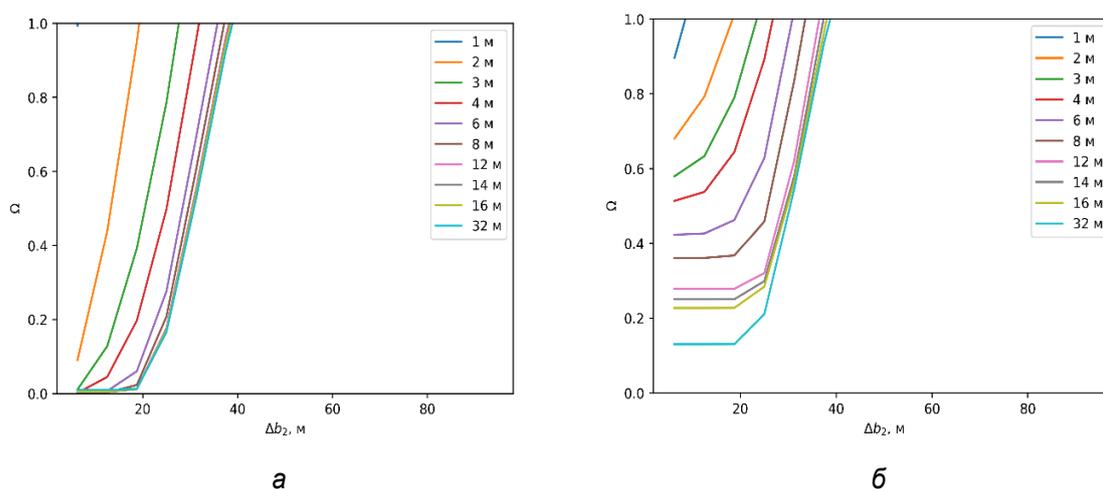
$$\Omega = \sqrt{\frac{\int_0^{\pi} |S(\omega)e^{-j\omega\frac{2h}{v}} - \tilde{I}(\omega)|^2 d\omega}{\int_0^{\pi} |S(\omega)|^2 d\omega}}. \quad (11)$$

Мы получили упрощенную и компактную форму записи выражения для погрешности аппроксимации интеграла. Более общие выкладки приведены в Приложении, и из них следует (см. равенство (П3)), что для достижения заданной точности максимальное расстояние между косами можно назначать при выборе минимального расстояния между сейсмоприемниками  $\Delta b_1$ . Универсальные формулы в Приложении удобны еще и тем, что позволяют исследовать зависимость при  $\Delta b_1 \equiv 0$ . Также из них следует важный вывод, что при фиксированной глубине буксировки повышение ошибки аппроксимации с увеличением шага между приемниками происходит по квадратичному закону  $\Omega \sim \Delta b_1^2 + \Delta b_2^2$ , т. е. функция характеризуется быстрым возрастанием.

На практике всегда соблюдается неравенство  $\Delta b_1 \ll \Delta b_2$ . Поэтому в наших расчетных формулах назовем малый шаг  $\Delta b_1$  и исследуем влияние глубины буксировки и расстояния между соседними косами на точность вычислений.

Пусть для определенности  $S(\omega)$  является спектральной характеристикой импульса Рикера с доминирующей частотой 30 Гц. Этот же импульс будет использован и в дальнейшем, когда мы перейдем

к изучению особенностей задачи 2D. Посчитанные функции ошибки аппроксимации интеграла суммой в зависимости от расстояния между косами представлены на рис. 2. Расстояние между соседними приемниками было выбрано равным 6,25 м. Вычисления произведены для набора глубин буксировки от 1 до 32 м. При достижении глубины  $\approx 10$  м форма кривых стабилизируется, и дальнейшее ее увеличение на точность аппроксимации не влияет. Эту, а также другие особенности демонстрируемых графиков мы обсудим в разделе статьи, посвященном анализу задачи 2D.



**Рис. 2.** Графики точности аппроксимации интегрального оператора 3D. По горизонтальной оси отложено расстояние между соседними косами. Расчеты выполнены для набора глубин буксировки, указанного на рисунке:

а – прогнозирование спутника при помощи «полного оператора» (5);

б – прогнозирование спутника при помощи оператора дальней зоны

Пусть требуется обеспечить погрешность вычислений, не превышающую 5%. Как следует из рис. 2,а, заданная точность может быть достигнута при выборе расстояния между косами менее 20 м. Если предположить, что такая расстановка может быть использована для получения площадных сейсмограмм, то глубину буксировки следует выбрать 10 м и более. Разумеется, на практике не встречается ситуаций, когда соседние косы буксируются на столь малом расстоянии друг от друга. Поэтому полученные нами результаты могут рассматриваться как рекомендации к выбору параметров алгоритмов интерполяции, показывая, при каком расстоянии между косами и при какой глубине буксировки можно обеспечить заданную точность вычислений.

Здесь мы не ограничивали апертуру интегрирования, назначив ее заведомо большой. В дальнейшем будут подробно рассмотрены особенности и возможности реализации волновых продолжений операторами с применением тех или иных ограничений апертуры. Забегая вперед, скажем, что сужение области интегрирования может приводить к снижению уровня аляйсинг-помех. Однако погрешности аппроксимации, которые влияют на характер кривых, показанных на рис. 2, не устраняются путем введения таких ограничений.

Будем полагать, что для двух неотрицательных чисел  $p$  и  $q$  неравенство  $p \ll q$  выполняется, если  $p < \frac{q}{5}$ . Тогда при  $\frac{v}{\omega r(b, x)} \leq \frac{1}{5}$  вторым слагаемым в круглых скобках в равенстве (5) можно пренебречь. В случае нормального падения плоской волны последнее условие принимает вид:

$$h \geq \frac{5v}{2\omega}. \quad (12)$$

Если падение волны происходит не по нормали, то условие тем более соблюдается, так как  $r(b, x) \geq 2h$  и  $r(b, x) = 2h$  при  $b = x = 0$ , т.е. в случае нормального падения. Для получения соответствующих оценок за  $\omega$  условимся принимать частоту гармоники, доминирующей в спектре сейсмического импульса, которую обозначим через  $\omega_{\text{дом}}$ , при этом  $\omega_{\text{дом}} = 2\pi f_{\text{дом}}$ , где  $f$  – линейная частота. Если положить  $f_{\text{дом}} = 30$  Гц и  $v = 1500$  м/с, то вторым слагаемым в (5) можно пренебречь для глубин  $h \geq 20$  м. Иначе говоря, при выборе глубины буксировки 20 м и более становится корректным приближение дальней зоны для оператора продолжения поля, и (5) можно переписать в виде

$$K(b, x, \omega) \approx K^{\text{ДЗ}}(b, x, \omega), \text{ где } K^{\text{ДЗ}}(b, x, \omega) = -\frac{j\omega \cos \phi(b, x)}{2\pi v r(b, x)} e^{j\frac{\omega}{v}r(b, x)}.$$

Тогда получим оператор прогнозирования спутника, тождественный тому, к которому мы пришли в работе [Денисов, Егоров, 2016а]. В литературе его принято называть оператором дальней зоны [Козлов, 1986], что мы учли, введя верхний индекс ДЗ. Графики точности аппроксимации, полученные для оператора  $K^{\text{ДЗ}}(b, x, \omega)$ , представлены на рис. 2,б.

## ОБРАБОТКА ПРОФИЛЬНЫХ СЕЙСМОГРАММ (ЗАДАЧА 2D)

Если сейсморазведка проводится при помощи одиночной буксируемой косы, то регистрируются профильные сейсмограммы, которые, в отличие от использованных ранее вектор-координат, будем характеризовать одномерными латеральными координатами. Геометрия косы может быть произвольной: горизонтально-плоской, наклонной или даже криволинейной. Для построения алгоритмов обработки таких данных принято делать предположение о цилиндрической симметрии среды, когда принимается гипотеза о том, что наклоны глубинных границ в направлении, перпендикулярном линии наблюдений, малы. Именно этой логики рассуждений мы будем придерживаться.

Воспользуемся приемом, предложенным в работе [Wapenaar et al., 1992], чтобы скорректировать амплитуды сигналов в трассах, применив *преобразование к линейному источнику*. В простейшем случае алгоритм реализуется как коррекция геометрического расхождения путем умножения каждой трассы на функцию  $\sqrt{t}$ . В результате динамика сигналов станет такой, как если бы волновое поле было вызвано не

точечным, а линейным источником, ориентированным ортогонально профилю наблюдений. Полученное волновое поле не зависит от координаты  $b_2$ , тем самым задача сводится к двумерной.

К сожалению, мы не можем ограничиться простым упоминанием того факта, что задача 3D сведена к 2D, и заимствовать оператор продолжения поля из известной литературы. Дело в том, что, несмотря на кажущуюся проработанность вопроса, мы не нашли публикаций, в которых содержалась бы достоверная информация. Хотя оператор для двумерной задачи известен и связан с так называемой 2D функцией Грина, в подавляющем большинстве источников приводится асимптотическое выражение оператора дальней зоны – см., например, [Петрашень, Нахамкин, 1973; Козлов, 1986] и др. Вероятно, это обусловлено тем, что в отличие от задачи 3D, где вычисление производной функции Грина с сохранением члена ближней зоны не сопряжено с трудностями (см. выражения (3) и (5)), в задаче 2D ситуация иная, и приходится прибегать к выводу формул повышенной сложности. Нас интересуют вопросы, связанные, в том числе, с обработкой данных, полученных при помощи мелко буксируемой косы, что требует продолжения поля на небольшие расстояния, вследствие чего мы не имеем возможности ограничиться только асимптотикой дальней зоны, и при выводе оператора необходимо учитывать и эффекты, происходящие в ближней зоне.

Так как волна-спутник прогнозируется при помощи интегрального преобразования (2), ядро которого определяется равенством (3), то, подставив (3) в (2), и с учетом (4) приходим к

$$G(x, \omega) = -\frac{a}{2\pi} \iint_{b_1 b_2} \frac{\partial}{\partial n} \left( \frac{1}{r(b_1, b_2, x)} e^{j\frac{\omega}{v} r(b_1, b_2, x)} \right) W(b_1, b_2, \omega) db_1 db_2.$$

Так как поле восходящих волн не зависит от координаты  $b_2$ :  $W(b_1, b_2, \omega) = W(b_1, \omega)$ , то

$$G(x, \omega) = -\frac{a}{2\pi} \int_{b_1} W(b_1, \omega) \frac{\partial}{\partial n} \left( \int_{b_2} \frac{1}{r(b_1, b_2, x)} e^{j\frac{\omega}{v} r(b_1, b_2, x)} db_2 \right) db_1,$$

где из-под интеграла по  $b_2$  мы вынесли  $W$ , а также поменяли местами процедуры интегрирования и вычисления производной по нормали. Интеграл в круглых скобках вычисляется с привлечением специальных функций:

$$\int_{b_2} \frac{1}{r(b_1, b_2, x)} e^{j\frac{\omega}{v} r(b_1, b_2, x)} db_2 = -j\pi H_0^{(1)} \left( \rho \frac{\omega}{v} \right),$$

где  $H_0^{(1)}$  – первая функция Ханкеля нулевого значка,  $\rho = \sqrt{(2h)^2 + b_1^2}$  [Прудников и др., 2003]. Таким образом, имеем

$$G(x, \omega) = -\frac{ja}{2} \int_{b_1} W(b_1, \omega) \frac{\partial}{\partial n} H_0^{(1)}\left(\rho \frac{\omega}{v}\right) db_1. \quad (13)$$

Запишем цепочку равенств:

$$\frac{\partial}{\partial n} H_0^{(1)}\left(\rho \frac{\omega}{v}\right) = \frac{\omega}{v} \frac{\partial}{\partial \xi} \left( H_0^{(1)}(\xi) \right) \frac{\partial \rho}{\partial n} = \frac{\omega}{v} \cos \phi(b_1, x) \frac{\partial}{\partial \xi} \left( H_0^{(1)}(\xi) \right) = -\frac{\omega}{v} \cos \phi(b_1, x) H_1^{(1)}\left(\rho \frac{\omega}{v}\right), \quad (14)$$

где использовано обозначение  $\xi = \rho \frac{\omega}{v}$ . Последнее равенство в цепочке записано с учетом свойства

$$\frac{\partial}{\partial \xi} \left( H_0^{(1)}(\xi) \right) = -H_1^{(1)}(\xi) \quad [\text{Абрамовиц, Стиган, 1979}].$$

Преобразование, при помощи которого прогнозируется волна-спутник, принимает вид

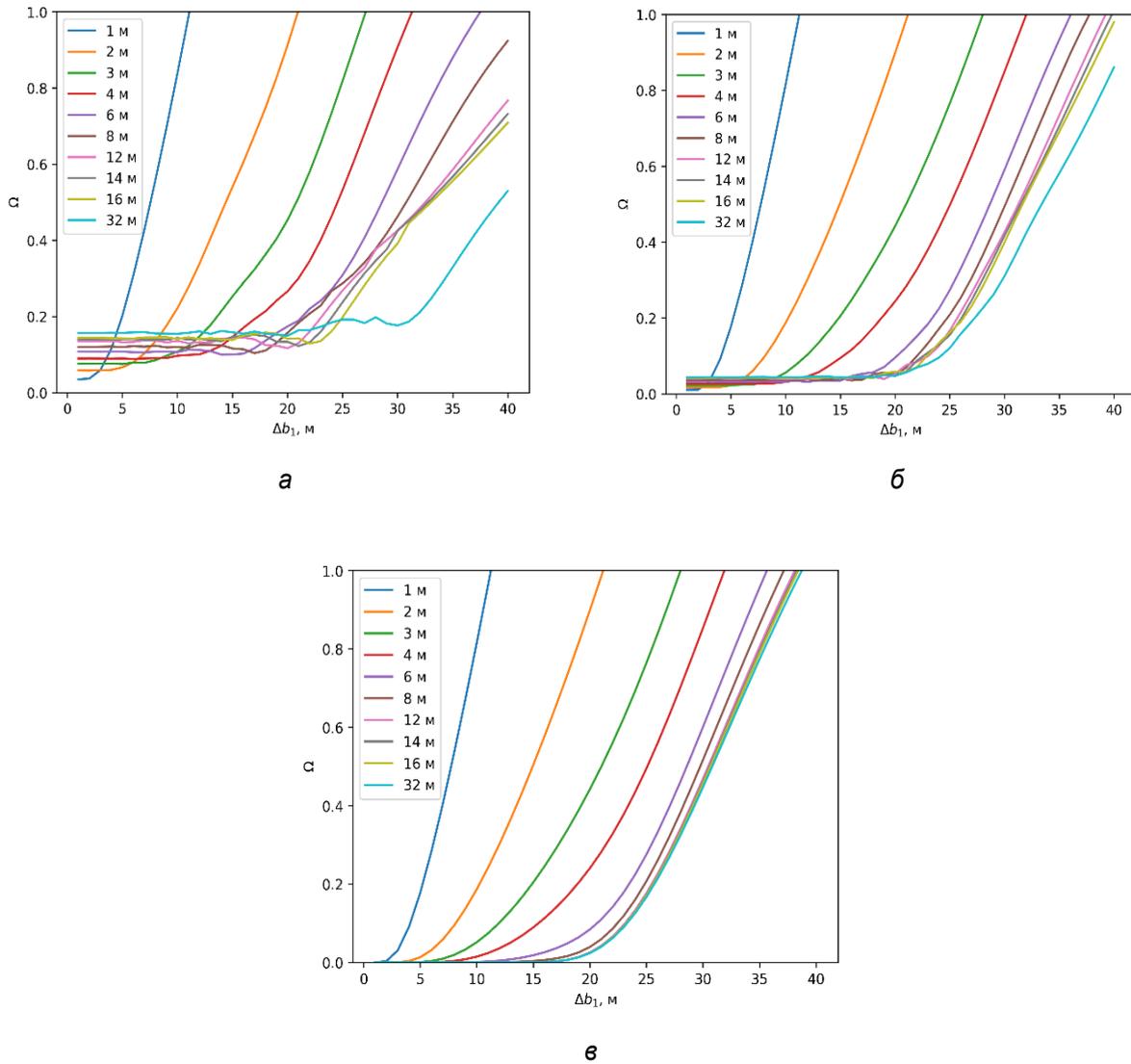
$$G(x, \omega) = \frac{ja\omega}{2v} \int_{b_1} W(b_1, \omega) \cos \phi(b_1, x) H_1^{(1)}\left(\rho \frac{\omega}{v}\right) db_1, \quad (15)$$

и на основании этого выражения при решении задачи подавления спутника на каждой фиксированной частоте формируется система линейных уравнений относительно искомой спектральной характеристики поля восходящих волн.

Теперь, аналогично тому, как мы это делали в задаче 3D, нам предстоит исследовать вопросы, связанные с точностью аппроксимации интеграла (15). В данной ситуации замена интеграла на сумму оказывается тождественной численному интегрированию функции одной переменной по методу левых или правых прямоугольников. Вновь сделаем предположение о том, что поле  $W$  представляет собой горизонтально-плоскую волну, импульс которой имеет спектр  $S(\omega)$ , а  $\Sigma$  – плоскость. Тогда в силу симметрии задачи метод левых или правых прямоугольников оказывается тождественным методу средних прямоугольников, известными формулами оценивания точности которого мы воспользуемся [Самарский, 1982]. Хотя это не оговаривалось, последнее соображение о тождественности методов привлекалось нами и ранее при оценивании точности аппроксимации двойного интеграла. Разумеется, если в качестве  $W$  выступает не горизонтально-плоская волна, то симметрия нарушается, причем тем сильнее, чем круче наклон волны.

Как и в предыдущем разделе, воспользуемся равенством (11) для получения простой и наглядной оценки. Посчитанные функции ошибки аппроксимации интеграла в зависимости от расстояния между приемниками представлены на рис. 3. Вычисления вновь произведены для набора глубин буксировки от 1 до 32 м. Результат, полученный при выборе интервала интегрирования, совпадающего с половиной первой зоной Френеля, симметрично расширенной областью аподизации (в англоязычной литературе – *tapering*), показан на рис. 3,а. Важно отметить, что в данном случае радиус половины первой зоны Френеля варьировался от 13 м (для заглубления косы 1 м) до 31 м (для заглубления косы 32 м). Таким образом, в

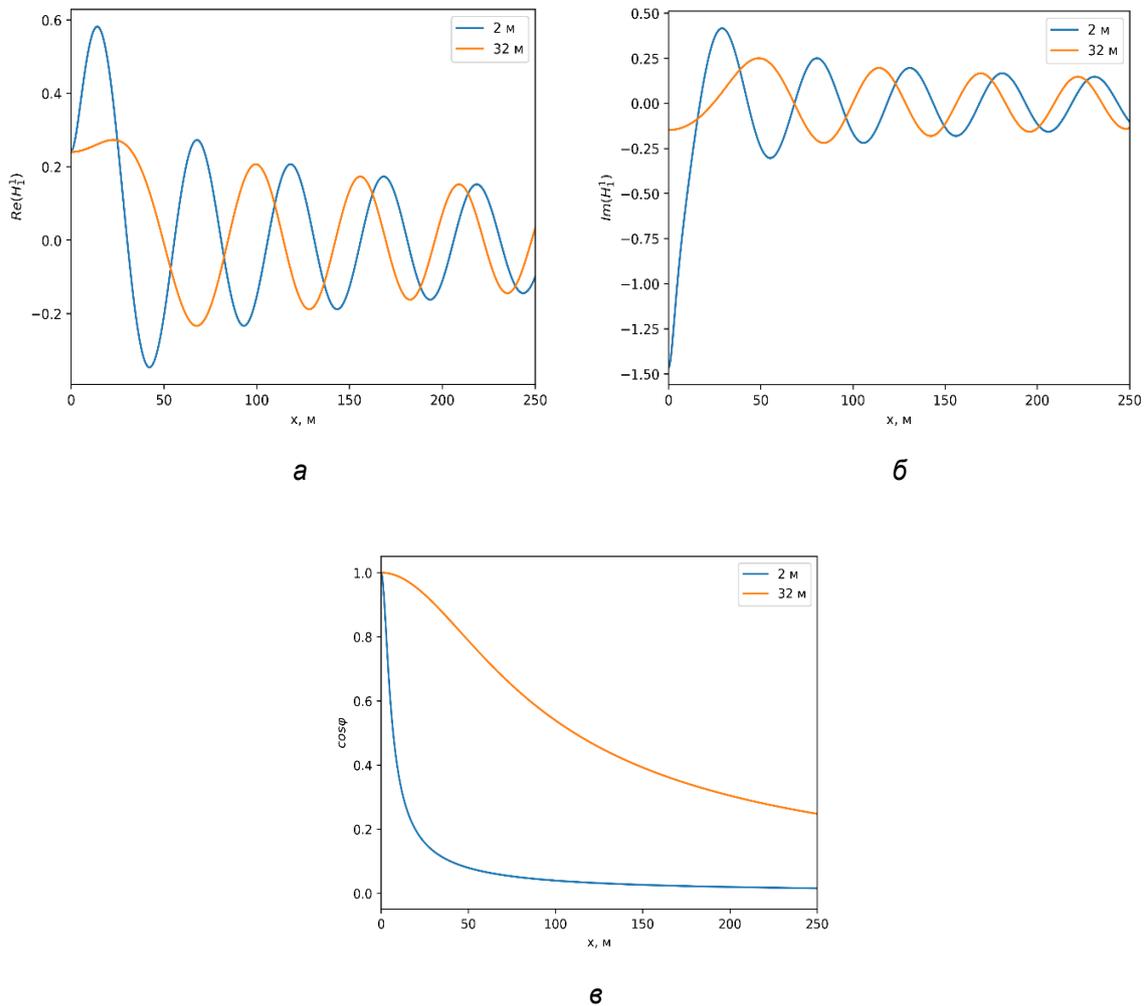
ее пределах могло находиться лишь три трассы или даже одна трасса. Последнее имеет место, например, при глубине буксировки 1 м и шаге между приемниками 13 м и более. В таких условиях не происходит корректного формирования импульса продолженной волны в точке касания траектории суммирования и годографа исходной волны, поэтому характерные особенности соответствующих графиков с трудом поддаются интерпретации.



**Рис. 3.** Графики точности аппроксимации интегрального оператора 2D. По горизонтальной оси отложено расстояние между соседними сейсмоприемниками. Расчеты выполнены для набора глубин буксировки, указанного на рисунке:  
 а – размер апертуры – половина первой зоны Френеля, расширенная на область аподизации;  
 б – размер апертуры – полторы зоны Френеля, расширенные на область аподизации;  
 в – заведомо большая апертура

Также отметим, что на рис. 3,а при уменьшении расстояния между приемниками погрешность аппроксимации не стремится к нулю. Это свидетельствует о том, что, ограничивая апертуру половиной первой зоны Френеля, мы не имеем возможности точно реализовать волновое продолжение. Иначе

говоря, даже интегральное преобразование, но посчитанное по ограниченной апертуре, не позволяет получить искомый сигнал в виде импульса, принадлежащего плоской волне, в которую внесена временная подвижка относительно исходной плоской волны.



**Рис. 4.** Действительная (а) и мнимая (б) части первой функции Ханкеля первого знака, а также функция  $\cos \phi(b_1, x)$  (в) при глубинах буксировки 2 и 32 м

Увеличение интервала интегрирования до полутра зон Френеля, расширенных областью аподизации, улучшает качество аппроксимации (рис. 3,б). Дальнейшее наращивание апертуры до заведомо больших значений (рис. 3,в) приводит к тому, что погрешность аппроксимации становится очень малой в пределах некоторого диапазона расстояний между приемниками. Кривые приобретают специфическую форму: при большой глубине буксировки на них наблюдается протяженный пологий участок, который достаточно резко сменяется участком интенсивного роста. Такое поведение графиков легко объяснить. Для некоторой фиксированной большой глубины буксировки постепенный рост шага интегрирования мало влияет на точность аппроксимации, так как функция ядра интегрального преобразования (15) характеризуется малой кривизной. В самом деле, в подынтегральном выражении фигурирует

произведение функции  $H_1^{(1)}(\rho \frac{\omega}{v})$  (рис. 4,а,б) и  $\cos \phi(b_1, x)$  (рис. 4,в). Функция  $H_1^{(1)}(\rho \frac{\omega}{v})$  связана с переменной интегрирования  $b_1$  посредством зависимости  $\rho = \rho(b_1) = \sqrt{(2h)^2 + b_1^2}$ . Для больших значений  $h$ , а именно, когда

$$(2h)^2 \gg b_1^2 \quad (16)$$

(т. е., соответственно, для малых  $b_1$ ) функция  $\rho = \rho(b_1)$  изменяется медленно, следовательно, и подынтегральное выражение оказывается почти константой. Функция  $\cos \phi(b_1, x)$  для больших значений глубины также изменяется медленно. Поэтому метод прямоугольников обеспечивает высокую точность аппроксимации. С увеличением  $b_1$  функция  $H_1^{(1)}$  начинает осциллировать и точность аппроксимации снижается. При достижении некоторого шага (ниже будет показано, что этот шаг соответствует побочному максимуму характеристики направленного суммирования плоской волны [Гольцман, 1964]) наблюдается резкий рост погрешности аппроксимации. Он связан с проявлением пространственного аляйсинга [Кондратьев, 1976], и мы считаем необходимым пояснить этот эффект подробнее.

При  $b_1 \rightarrow \infty$  выполняется  $\rho \rightarrow \infty$ , поэтому для больших значений координаты  $b_1$  первая функция Ханкеля первого знака переходит в свое асимптотическое представление в виде [Абрамовиц, Стиган, 1979]

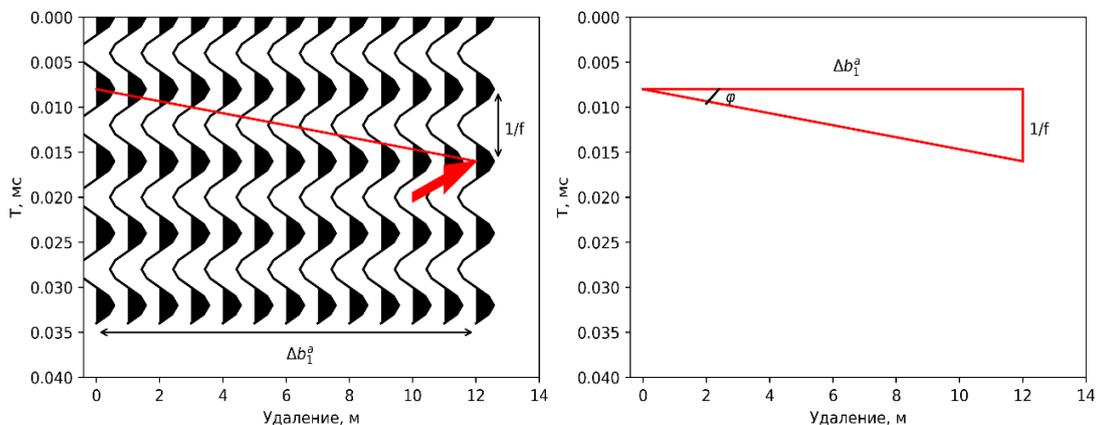
$$H_1^{(1)}(\xi) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi \xi}} e^{j(\xi - \frac{3\pi}{4})},$$

или, с учетом введенных ранее обозначений,

$$H_1^{(1)}(\rho \frac{\omega}{v}) \approx \sqrt{\frac{2v}{\pi \rho \omega}} e^{j\rho \frac{\omega}{v} - j\frac{3\pi}{4}}. \quad (17)$$

Понятно, что действие такого оператора в пространственно-временной области сводится к взвешенному суммированию трасс исходного поля вдоль гиперболической траектории  $\tau = \rho/v$  с последующей одноканальной фильтрацией. Так как проявление эффекта пространственного аляйсинга всегда связано с крутонаправленным накоплением сигналов, а максимальный наклон траектории суммирования достигается на ее асимптоте, то нас будут интересовать эффекты, возникающие на больших удалениях (т. е. при больших значениях координаты  $b_1$ , для которой и записано приближение (17)). В этом случае траектория становится почти линейной и имеет угол наклона, тангенс которого равен  $1/v$ . Импульс продолженной плоской волны формируется в локальной области точки касания годографа волны и траектории суммирования, т. е. при  $b_1 \approx 0$ . При малом шаге  $\Delta b_1$  накопление сигналов в

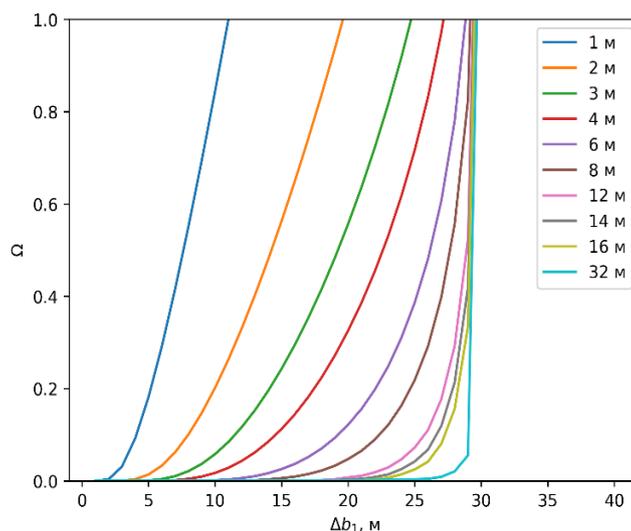
области асимптоты приводит к тому, что их амплитуды взаимно компенсируют друг друга, и вклад этой области в результат продолжения поля окажется почти нулевым. Если увеличивать шаг, будет наблюдаться аляйсинг-эффект, при котором в области асимптоты сформируются артефакты.



**Рис. 5.** Слева показан фрагмент сейсмограммы, содержащей горизонтально плоскую волну, импульс которой является монохромным сигналом. Наклонная линия – траектория суммирования в области асимптоты. Этой условной конфигурации соответствует прямоугольный треугольник, изображенный справа. Через  $\phi$  обозначен угол, тангенс которого известен и равен  $1/v$

Пусть импульс исходной плоской волны представляет собой монохромную частоты  $f$ . Как условно показано на рис. 5, накопление отсчетов трасс вдоль линейной траектории суммирования при малом шаге  $\Delta b_1$  оказывается несинфазным, поэтому результат будет иметь почти нулевую амплитуду. Увеличивая шаг, можно достигнуть такого его значения  $\Delta b_1^a$ , что суммируемые сигналы будут не компенсировать, а усиливать друг друга. Величину  $\Delta b_1^a$  вычислить несложно: при таком шаге набег фазы сигнала на соседних трассах должен быть равным периоду колебаний, т. е.  $1/f$ . Из приведенной на рисунке условной схемы можно сформировать прямоугольный треугольник, в котором известен тангенс угла между гипотенузой и стороной, длина которой является искомой. Также известна длина противолежащей стороны треугольника.

Из соотношения сторон и углов следует  $\Delta b_1^a = v/f$ . Например, если  $f = 50$  Гц и  $v = 1500$  м/с, то  $\Delta b_1^a = 30$  м. Этот вывод подтверждается результатами расчетов, демонстрируемыми на рис. 6, где показаны графики погрешности аппроксимации. Как мы уже наблюдали ранее, для больших глубин (30 м и более) погрешность оказывается небольшой, если  $\Delta b_1 < \Delta b_1^a$ . Когда шаг достигает величины  $\Delta b_1^a$ , появляются аляйсинг-помехи, и это приводит к резкому падению точности. При мелкой (менее 6 м) буксировке косы постепенный рост ошибки аппроксимации связан с нарастающей по мере увеличения шага погрешностью метода численного интегрирования.



**Рис. 6.** Графики точности аппроксимации интегрального оператора 2D. По горизонтальной оси отложено расстояние между соседними сейсмоприемниками. В качестве импульса исходной плоской волны используется монохроматический сигнал частоты 50 Гц

При вычислении интеграла (15) по методу прямоугольников проявление аляйсинг-эффекта имеет следующую специфику. Как следует из (17), в области больших значений координаты  $b_1$  интегрируемая функция является затухающим гармоническим колебанием частоты  $2\pi f / v$  (в данном случае аргументом периодической функции является  $b_1$ ). При малом шаге  $\Delta b_1$  численное интегрирование такой функции на ее периоде приводит к результату почти нулевой амплитуды, что и требуется получить. По мере увеличения шага будет достигнуто такое его значение, при котором последовательные отсчеты будут браться по одинаковым фазам гармонического колебания, например, по его максимумам, и это приведет к усилению сигнала. Такой шаг совпадает с периодом колебаний, а последний равен  $v / f$ . Таким образом, мы получили то же значение шага численного интегрирования  $\Delta b_1^a$ , к которому приходили выше, исходя из иных соображений.

Отличие кривых на рис. 6 от аналогичных графиков на рис. 3 заключается в том, что для получения последних использовался импульс Рикера, и именно поэтому на них отсутствует излом. Амплитудный спектр импульса Рикера имеет максимум на выбранной частоте и затухает по мере удаления от нее. Поэтому описанные выше факторы начинают действовать не скачкообразно, а постепенно. Например, при увеличении шага аляйсинг-помеху вначале порождают высокочастотные компоненты сигнала, а затем к ним добавляются среднечастотные. Как следствие, кривая погрешности аппроксимации становится гладкой.

Для ослабления аляйсинг-эффекта при решении задач обработки данных сейсморазведки вводят ограничение апертуры. Именно так мы и поступали, исследуя вопросы аппроксимации интеграла, вычисляемого в пределах половины или полутора зон Френеля. Однако на практике такое ограничение, как правило, не является эффективным средством борьбы с аляйсингом. В наших экспериментах мы

располагали полной информацией об исходном волновом поле, что позволило локализовать область, в которой формировался сигнал продолженной волны. При обработке реальных сейсмограмм заранее неизвестно положение точки касания, поэтому введение ограничения апертуры оказывается рискованным, так как оно может привести к потере сигнала на некоторых пространственных частотах. Как известно [Козлов, 1986], применение преобразований миграционного типа (к ним относится и продолжение волновых полей) может рассматриваться как двухшаговая процедура. На первом этапе производится обнаружение сигнала в исходном волновом поле. Накапливание вдоль траектории суммирования фактически означает перебор всех возможных точек касания, что тождественно процедуре обнаружения. Поэтому необходимо использовать достаточно широкие апертуры. На втором этапе реализуется подвижка сигнала в соответствии с кинематической схемой преобразования. В морской сейсморазведке косы буксируются на небольших глубинах. Это значит, что траектория оператора прогнозирования спутника очень быстро выходит на асимптоту. Поэтому при выборе даже ограниченной апертуры траектория на ее границах имеет почти максимальный наклон, что делает неизбежным появление аляйсинг-помех.

Наконец, понятие зоны Френеля в задачах сейсморазведки, имеющей дело с импульсными сигналами, оказывается достаточно размытым и всегда требующим пространных комментариев. На неоднозначность соответствующих определений указывают, в том числе, авторы учебника [Гурвич, Боганик, 2006], подробно обсуждая проблему оценивания размера *эффективной отражающей площадки*.

При мелкой буксировке пологий участок кривых на рис. 3 теряет протяженность. Это объясняется тем, что теперь неравенство (16) соблюдается лишь для очень небольшого диапазона значений  $b_1$ . Подынтегральная функция становится негладкой почти всюду, и ошибка аппроксимации быстро возрастает с увеличением  $\Delta b_1$ . Напомним, что точность метода прямоугольников определяется второй производной интегрируемой функции (подробнее – см. Приложение). Достижение порогового значения, при котором проявляется аляйсинг-эффект, уже не оказывает принципиального влияния на поведение кривой погрешности аппроксимации.

На основании приведенных на рис. 3,в кривых можно сделать вывод, что для наиболее распространенного в настоящее время расстояния между сейсмоприемниками, которое составляет 12,5 м, точность аппроксимации 5 % обеспечивается при глубине буксировки 4 м и более. Иногда используются буксируемые косы с расстоянием 6,25 м. В таком случае точность аппроксимации 5 % обеспечивается при глубине буксировки 2,5 м и более.

Из рис. 3,в также следует, что преобразование (15) способно обеспечивать корректный результат прогнозирования даже при предельно малом заглублении косы. Причина заключается в том, что при выводе (15) мы не прибегали к асимптотическим допущениям о большой глубине косы и пр. Был построен универсальный оператор прогнозирования, корректно обслуживающий ситуацию как дальней, так и ближней зон. Хотя в литературе встречаются попытки (к сожалению, весьма немногочисленные) построения 2D оператора преобразования, способного производить продолжение поля в условиях ближней зоны, мы вынуждены констатировать, что нам не удалось найти достоверного источника

информации. Публикации даже в весьма авторитетных изданиях, как, например, [Bevc, 1997], содержат неточности и ошибки, которые не позволяют воспользоваться полученными результатами. В связи с этим мы посчитали целесообразным кратко изложить вывод оператора здесь, а также исследовать возможность его применения для решения задачи прогнозирования волны-спутника.

Во всех известных нам работах, посвященных изучению таких операторов, рассуждения отталкиваются от выражения (13) и затем, не переходя к цепочке равенств (14), производится дифференцирование либо асимптотического представления функции Ханкеля  $H_0^{(1)}(\xi)$ , либо ее разложения в виде усеченного ряда.

Представим функцию Ханкеля в виде разложения в ряд [Градштейн, Рыжик, 1962]:

$$H_0^{(1)}(\xi) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi\xi}} e^{j(\xi - \frac{\pi}{4})} \left( 1 + \frac{1}{j8\xi} + \dots \right), \quad (18)$$

где выписаны два первых члена. Очень часто ограничиваются только одним членом, так как в приближении дальней зоны выполняется  $8\xi \gg 1$ . Мы же подставляем (18) в (13) с сохранением обоих слагаемых. Теперь требуется посчитать находящуюся под знаком интеграла производную по нормали, что связано с достаточно громоздкими выкладками, в результате которых имеем

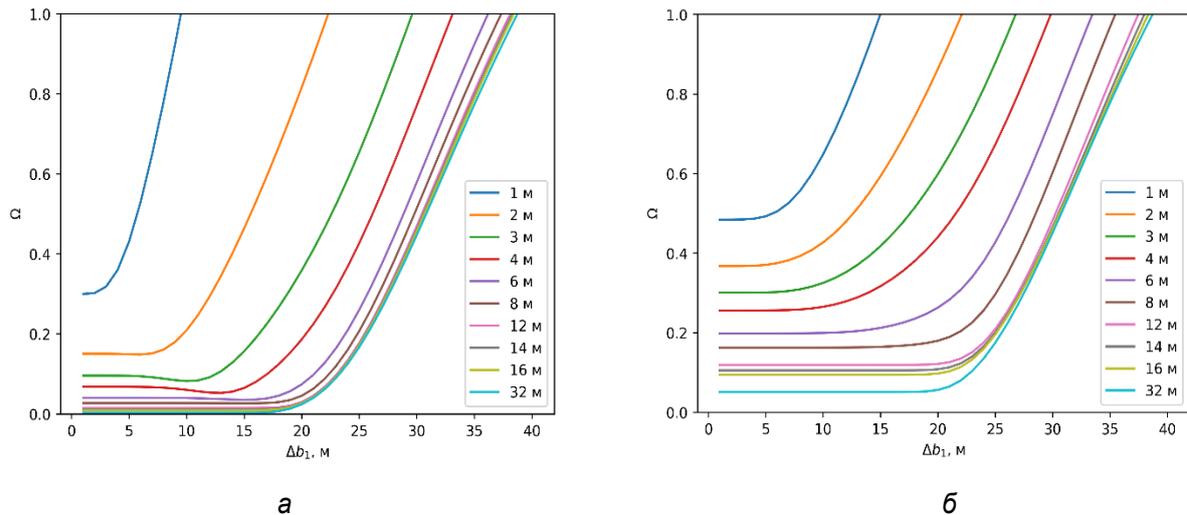
$$\frac{\partial}{\partial n} H_0^{(1)}\left(\rho \frac{\omega}{v}\right) = j \sqrt{\frac{2\omega}{\pi\rho v}} \left( 1 + j \frac{3v}{8\omega\rho} \right) e^{-j\frac{\pi}{4}} e^{j\frac{\omega}{v}\rho} \cos\phi(b_1, x). \quad (19)$$

Подставляя (19) в (13), приходим к окончательному выражению для 2D оператора прямого продолжения поля с возможностью работы в ближней зоне:

$$G(x, \omega) = a \sqrt{\frac{\omega}{2\pi v}} e^{-j\frac{\pi}{4}} \int_{b_1} W(b_1, \omega) \left( 1 + j \frac{3v}{8\omega\rho} \right) e^{j\frac{\omega}{v}\rho} \frac{\cos\phi(b_1, x)}{\sqrt{\rho}} db_1. \quad (20)$$

Вновь отметим, что проделанные выкладки представляются нам как усложненный способ получения искомого оператора (20), и проведены лишь с целью исправления ошибочных результатов, полученных в некоторых публикациях и приводящих к путанице. К этому же результату можно прийти на основании более простых преобразований. А именно: подставив в (15) функцию  $H_1^{(1)}$  в виде ряда и ограничиваясь двумя первыми членами разложения [Градштейн, Рыжик, 1962].

Используем оператор (20) для прогнозирования волны-спутника в тех же условиях, в которых мы изучали оператор (15). Функции ошибки аппроксимации интеграла суммой в зависимости от расстояния между приемниками представлены на рис. 7. Вычисления вновь произведены для набора глубин буксировки, а апертура была выбрана заведомо большой.



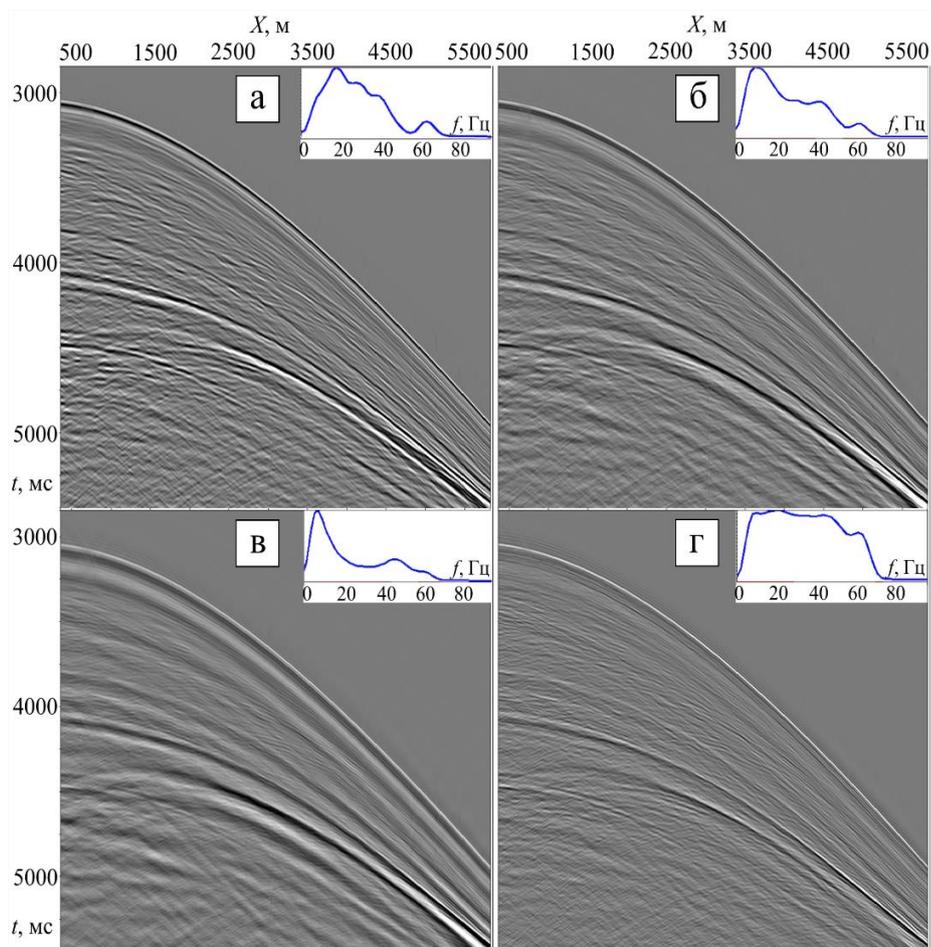
**Рис. 7.** Графики точности аппроксимации 2D интегрального оператора ближней зоны (20) (а) и 2D интегрального оператора дальней зоны (б). По горизонтальной оси отложено расстояние между соседними сейсмоприемниками

Как следует из рис. 7,а, при малой глубине буксировки ошибка аппроксимации не стремится к нулю при уменьшении расстояния между приемниками. Указанная особенность объясняется тем, что при выводе формулы мы ограничились учетом лишь двух членов разложения в ряд (18). При увеличении глубины эффект уменьшается и, начиная с 14 м, погрешность не превышает величины 5 %. При продолжении поля на любые расстояния преобразование (20) обеспечивает ошибку, меньшую той, которую мы имеем, учитывая лишь первый член разложения (18), т. е. используя так называемый оператор дальней зоны (рис. 7,б). Универсальное выражение для погрешности численного интегрирования (20) приведено в Приложении.

### ПРИМЕР ОБРАБОТКИ

Продемонстрируем возможности операторов прогнозирования в задаче 2D. На рис. 8,а представлена сейсмограмма ОПВ до подавления волн-спутников и ее амплитудный спектр, который заметно обеднен низкими частотами и имеет ярко выраженный минимум в диапазоне между 50 и 60 Гц. Этот минимум вызван волнами-спутниками со стороны источника (близкая к нулю амплитуда на частоте 54 Гц, что связано с глубиной буксировки источника, равной 14 м) и приемника (провал частотной характеристики на 50 Гц, что связано с глубиной буксировки косы, равной 15 м). Результат подавления волн-спутников со стороны приемника (рис. 8,б) характеризуется расширением спектра сигнала (в данном случае – преимущественно в область низких частот).

Для подавления волн-спутников со стороны источника к сейсмограммам общего пункта приема (ОПП), сформированным при помощи бинирования, был применен этот же алгоритм после замены в нем глубины приемников на глубину источников. В результате применения процедуры (рис. 8,в) удалось восстановить провал в амплитудном спектре и еще больше усилить низкие частоты. Повышение разрешающей способности сигнала и расширение диапазона частот реализовано при помощи деконволюции сжатия импульса (рис. 8,г).



**Рис. 8.** Сейсмограммы ОПВ и их амплитудные спектры:

а – до подавления волн-спутников;

б – после подавления волн-спутников со стороны приемника;

в – после подавления волн-спутников со стороны приемника и источника;

г – после подавления волн-спутников со стороны приемника и источника и последующей деконволюции сжатия

## ОБСУЖДЕНИЕ РЕЗУЛЬТАТОВ

На примере задачи прогнозирования и подавления волн-спутников мы изучили свойства, а также границы применимости интегральных операторов продолжения упругих волновых полей, применяемых к дискретным сигналам. Сделанные выводы относятся и к иным практическим задачам обработки сейсмических данных, в которых применяются прямые и обращенные волновые продолжения. Впрочем, отдельные алгоритмы не столь требовательны к параметрам систем наблюдений. К таким алгоритмам можно отнести, в том числе, и сейсмическую миграцию, если она применяется для построения изображения глубоко залегающих границ. Все же большинство из перечисленных во вводной части статьи алгоритмов не может уверенно использоваться без отдельного изучения корректности применяемых преобразований. Например, компенсация влияния неоднородностей верхней части разреза, рассматриваемая как альтернатива методу статических поправок, подразумевает прямое и обращенное продолжение поля на небольшие расстояния, измеряемые единицами или первыми десятками метров. Аналогично, методы прогнозирования кратных волн, применяемые к сейсмическим данным, полученным

в условиях мелководья, должны корректно реализовывать прямое продолжение поля восходящих волн на небольшие расстояния, равные удвоенной глубине водного слоя.

Представим, что нам предстоит решить задачу продолжения горизонтально-плоской волны на небольшое расстояние. Пусть это будет 1 м или даже 1 см. Если подставить в (5) величину  $h = 1$  см, то фигурирующий в этом выражении параметр  $r = \sqrt{(2h)^2 + b_1^2 + b_2^2}$  в точке  $b_1 = b_2 = 0$  окажется очень малой величиной. Тогда в формуле (5), где во втором слагаемом в круглых скобках  $r$  расположен в знаменателе, первым слагаемым можно пренебречь, т. е. при  $r \rightarrow 0$  справедливо  $1 \ll \frac{v}{\omega r}$ . С учетом этого от (5) переходим к

$$K^{БЗ}(b, x, \omega) = \frac{\cos \phi(b, x)}{2\pi r^2(b, x)} e^{j\frac{\omega}{v}r(b, x)}, \quad (21)$$

т. е. к оператору ближней зоны (БЗ). В пространственно-временной области (21) производит взвешенное суммирование трасс исходного поля, при этом веса обратно пропорциональны квадрату расстояния:  $\sim 1/r^2$ . Так как  $r \rightarrow 0$ , то вес в центральной точке апертуры, которой соответствует  $r(b = 0, x = 0)$ , быстро устремляется к бесконечности.

В качестве мысленного эксперимента представим, что мы применили этот оператор к волновому полю, зарегистрированному на дискретной сети наблюдений. Амплитуда результата будет неограниченно возрастать при уменьшении расстояния, на которое продолжается плоская волна, в то время как требуется сохранить ее амплитуду. Иными словами, в пределе, при  $h = 0$ , когда уровень регистрации не меняется, оператор преобразования должен сохранять исходную волну, т. е. должен вырождаться в дельта-функцию. Но что здесь следует понимать под дельта-функцией? Если допустить, что дискретности нет, данные непрерывны и, как следствие, используется интегральный оператор, то волновое поле не изменится при свертке с оператором вида функции Дирака [Корн, Корн, 1973], которую мы для ясности назовем *непрерывной дельта-функцией*. Можно условно полагать, что амплитуда такого оператора равна бесконечности в начале координат. Если же имеются данные в виде трасс, зарегистрированных на дискретной сети наблюдений, то оператор, не изменяющий волновое поле, должен выглядеть как *дискретная дельта-функция*, которую принято называть символом Кронекера [Корн, Корн, 1973]. Амплитуда такого оператора равна единице в его центральной точке.

Легко понять, что описанные особенности связаны с некорректной аппроксимацией интегрального преобразования при его применении к дискретным данным. Поэтому мы призываем осуществлять такой переход с осторожностью и осознанием ограничений, сопутствующих замене оператора преобразования. На практике почти повсеместно переход от интеграла Кирхгофа или аналогичных ему выражений к суммам производят без специальных рассуждений и изучений условий возможности такой замены. Анализу этих вопросов мы посвятили значительную часть нашего исследования еще и потому, что сделанные выводы напрямую относятся не только к задаче подавления волн-спутников, которая была нами выбрана в качестве удобного примера, но и к целому классу упомянутых выше и широко используемых на практике алгоритмов.

Для изучения границ применимости аппроксимации интегрального оператора продолжения поля следует анализировать зависимость глубинного интервала, на который можно корректно производить продолжение, от величины шага между сейсмоприемниками. Например, в задаче прогнозирования кратных волн, связанных с переотражением от выбранного горизонта, в роли глубины буксируемой косы будет выступать глубина этого горизонта. При погружении сейсмограмм, коррекции уровня приведения или замещения слоя – глубина, на которую происходит пересчет волнового поля. При сейсмической миграции – глубина, для которой производится построение изображения. Так, в задаче прогнозирования кратных волн, связанных с переотражением от морского дна, применяется оператор прямого продолжения поля по семейству лучей волны, однократно отраженной от этой границы [Денисов, Фиников, 2007]. Типичный шаг между сейсмоприемниками буксируемой косы указаны нами выше, он равен 12,5 м. Это значит, что минимальная глубина морского дна, при которой применение интегрального оператора продолжения поля будет корректным, совпадает с полученной нами оценкой для минимальной глубины буксировки и при  $f_{\text{доп}} = 30$  Гц составляет 4 м. В таком случае необходимо использовать не асимптотическое выражение для дальней зоны, а «полный» оператор (15). Аналогичный анализ особенностей аппроксимации операторов можно проводить и в других перечисленных выше задачах обработки.

Очень часто в публикациях, в которых привлекаются интегральные продолжения волновых полей, зарегистрированных на дискретной сети наблюдений, характеризуемой большим расстоянием между соседними пунктами приема, предлагается применять алгоритмы интерполяции. Здесь мы намеренно оставили эти вопросы вне нашего рассмотрения, так как понимаем всю сложность задачи и знаем о недостатках и ограничениях интерполяционных алгоритмов.

Наконец заметим, что хотя арсенал численных методов решения математических задач содержит множество различных способов вычисления интегралов, и большинство из них оказываются более точными, чем метод прямоугольников и метод ячеек, в нашей задаче мы не имеем возможности использовать эти методы. В самом деле, интегральное преобразование вида прямого продолжения поля применяется нами не в явном виде с целью прогнозирования волны-спутника, а лишь как элемент расчетных формул. Алгоритм сводится к решению системы линейных уравнений, в результате чего получаем волновое поле, очищенное от помех. Если же применить альтернативный способ аппроксимации интегрального оператора, то мы не получим решения задачи в удобном и компактном виде. Мы допускаем, что в других упомянутых задачах можно воспользоваться более точными способами численного интегрирования. Однако это уже выходит за рамки темы нашего исследования, и этот вопрос мы пока оставим без комментария. Скажем лишь, что о возможности улучшения оператора продолжения поля можно судить после тщательного изучения каждой конкретной ситуации.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Мы исследовали вопросы, связанные с точностью аппроксимации интегральных операторов продолжения волновых полей в задачах сейсморазведки. В качестве примера выбрано прогнозирование волны-спутника для буксируемой косы. Особенностью алгоритма является необходимость продолжения

поля на небольшие расстояния, т. е. работа в ближней зоне. Это позволяет детальнее изучить границы применимости используемых средств численного интегрирования: метода ячеек и метода прямоугольников.

В статье построен, проанализирован и опробован оператор прогнозирования и удаления волны-спутника для косы произвольной конфигурации, в том числе, в условиях мелкой буксировки.

При необходимости можно оснастить алгоритмы средствами оптимизации в соответствии с принципами, описанными в работе [Денисов, Егоров, 2016а], что позволит оценивать и учитывать реальный коэффициент отражения от поверхности моря и локально уточнять скорость распространения упругой волны в водном слое.

## ПРИЛОЖЕНИЕ

### ЗАДАЧА 3D

Воспользуемся выражением для погрешности вычисления двойного интеграла по методу ячеек, которое приводится в монографии по численным методам [Калиткин, 1978]:

$$\Psi(x, \omega) \approx \frac{j\omega}{48\pi v} \left[ \Delta b_1^2 \iint_{\Phi_1} J''_{b_1 b_1} db_1 db_2 + \Delta b_2^2 \iint_{\Phi_1} J''_{b_2 b_2} db_1 db_2 \right],$$

где  $\Psi$  – разность между точным значением интеграла и его оценкой,  $J''_{b_1 b_1}$  – частная производная второго порядка по переменной  $b_1$ ,  $J''_{b_2 b_2}$  – частная производная второго порядка по переменной  $b_2$ . Тогда в силу свойств симметрии функции  $J$  интегралы в выражении, взятом в квадратные скобки, равны. Поэтому

$$\Psi(\omega) \approx \frac{j\omega}{48\pi v} \left[ \Delta b_1^2 + \Delta b_2^2 \right] \iint_{\Phi_1} J''_{b_1 b_1} db_1 db_2, \quad (\text{П1})$$

где мы для компактности записали  $\Psi(\omega) = \Psi(x=0, \omega)$ .

Более информативной окажется полная относительная ошибка прогнозирования спутника  $\Omega$ , в качестве аргументов которой нам будет удобно указывать глубину буксировки и расстояния между сейсмоприемниками:  $\Omega = \Omega(h, \Delta b_1, \Delta b_2)$ , и для получения которой следует проинтегрировать энергию погрешности (П1) в пределах сигнального диапазона частот с последующей нормировкой на энергию вычисляемого интеграла (9) и извлечением квадратного корня

$$\Omega(h, \Delta b_1, \Delta b_2) = \frac{1}{\sqrt{E}} \sqrt{\int_0^\pi \Psi(\omega) \Psi^*(\omega) d\omega},$$

где  $\Psi^*$  комплексно сопряжено к  $\Psi$ , а

$$E = \int_0^{\pi} I(\omega) I^*(\omega) d\omega,$$

где введено аналогичное обозначение  $I(\omega) = I(x=0, \omega)$ . Интеграл (9) описывает продолжение поля плоской волны на расстояние  $2h$  в однородном слое, и в результате его вычисления мы получили бы плоскую волну с введенной подвижкой и с сохраненной формой импульса. Тогда приходим к выражению для относительной ошибки:

$$\Omega(h, \Delta b_1, \Delta b_2) = \sqrt{\frac{\int_0^{\pi} \Psi(\omega) \Psi^*(\omega) d\omega}{\int_0^{\pi} |S(\omega)|^2 d\omega}}.$$

Теперь нам предстоит произвести вычисление двойного интеграла  $\iint_{\Phi_1} J''_{b_1 b_1} db_1 db_2$ , входящего в равенство (П1). Так как по переменной  $b_1$  производится интегрирование частной производной второго порядка по этой же переменной, то результат вычисляется элементарно. Первообразная совпадает с производной первого порядка, поэтому двойной интеграл вырождается в интеграл по одной переменной  $b_2$ :

$$\iint_{\Phi_1} J''_{b_1 b_1} db_1 db_2 = 4 \int_0^{\sqrt{R_1^2 - b_2^2}} \left( J'_{b_1} \Big|_{b_1=0}^{b_1=\sqrt{R_1^2 - b_2^2}} \right) db_2,$$

где учтены пределы интегрирования, заданные неравенством (8). Остается вычислить интеграл в правой части последнего равенства, что мы можем сделать численно, задавая заведомо подробный шаг интегрирования (в данном случае он может быть выбран сколь угодно малым). Результат интегрирования, зависящий от глубины буксировки  $h$ , обозначим через  $Q(h, \omega)$ , откуда получим окончательное выражение для погрешности:

$$\Omega(h, \Delta b_1, \Delta b_2) = \frac{(\Delta b_1^2 + \Delta b_2^2)}{12\pi v} \sqrt{\frac{\int_0^{\pi} \omega^2 Q(h, \omega) Q^*(h, \omega) d\omega}{\int_0^{\pi} |S(\omega)|^2 d\omega}}. \quad (\text{П2})$$

Последнее равенство имеет структуру

$$\Omega(h, \Delta b_1, \Delta b_2) = (\Delta b_1^2 + \Delta b_2^2) D(h), \quad (\text{П3})$$

где множитель в круглых скобках оказывается независящим от параметра  $h$ , а функция  $D$  не зависит от шагов  $\Delta b_1$  и  $\Delta b_2$ . Следовательно, (П3) представляет собой параболоид вращения относительно аргументов  $\Delta b_1$  и  $\Delta b_2$ , кривизна которого  $D(h)$  задается параметром  $h$ . Чем меньше глубина буксировки косы, тем быстрее нарастает погрешность с увеличением шага дискретизации.

Нетрудно убедиться в том, что второй множитель в виде дроби в правой части равенства (П2) всегда неотрицателен, поэтому  $D(h) \geq 0$ . Тем самым, при фиксированном шаге  $\Delta b_2$  минимальное значение погрешности  $\Omega$  достигается при  $\Delta b_1 = 0$ . На практике всегда выполняется неравенство  $\Delta b_2 \gg \Delta b_1$ . Поэтому в (П3) положим  $\Delta b_1 \equiv 0$  и будем изучать зависимость точности аппроксимации интеграла от шага  $\Delta b_2$  и глубины буксировки. Функция, к которой мы пришли, является центральным сечением параболоида плоскостью, т. е. параболой. При фиксированной глубине буксировки с ростом расстояния между косами ошибка аппроксимации возрастает по квадратичному закону.

### ЗАДАЧА 2D

Оценим погрешность численного расчета интеграла (20), который мы вновь обозначим как  $I$ :

$$I(x, \omega) = S(\omega) \sqrt{\frac{2\omega}{\pi v}} e^{-j\frac{\pi}{4}} \int_{\Phi_1} J(x, \omega, b_1) db_1 \quad (\text{П4})$$

с подынтегральной функцией

$$J(x, \omega, b_1) = \left( 1 + j \frac{3v}{8\omega\rho} \right) e^{j\frac{\omega}{v}\rho} \frac{\cos \theta(b_1, x)}{\sqrt{\rho}}. \quad (\text{П5})$$

Воспользуемся формулой для расчета погрешности метода средних прямоугольников [Самарский, 1982], обозначив ее так же, как погрешность метода ячеек, и подставив в нее выражение (П4). Тогда имеем

$$\Psi(x, \omega) \approx S(\omega) \frac{\Delta b_1^2}{24} \sqrt{\frac{2\omega}{\pi v}} e^{-j\frac{\pi}{4}} \int_{\Phi_1} J''_{b_1} db_1.$$

Отсюда перейдем к полной относительной ошибке  $\Omega$ :

$$\Omega(h, \Delta b_1) = \frac{1}{\sqrt{E}} \sqrt{\int_0^\pi \Psi(\omega) \Psi^*(\omega) d\omega}.$$

Интеграл от второй производной функции  $J$  вычислим как

$$\int_{\Phi_1} J''_{b_1 b_1} db_1 = 2 J'_{b_1} \Big|_{b_1=0}^{b_1=R_1},$$

для чего предварительно продифференцируем (П5) по  $b_1$ . Обозначив через  $q(h, \omega)$  разность значений первой производной на границах отрезка в правой части последнего выражения, приходим к окончательному выражению для погрешности в задаче 2D:

$$\Omega(h, b_1) = \frac{\Delta b_1^2 \sqrt{2}}{12 \sqrt{\pi v}} \sqrt{\frac{\int_0^\pi \omega q(h, \omega) q^*(h, \omega) d\omega}{\int_0^\pi |S(\omega)|^2 d\omega}}.$$

Мы вновь наблюдаем, что ошибка аппроксимации очень быстро нарастает с увеличением расстояния между приемниками, а именно – по квадратичному закону.

#### ЛИТЕРАТУРА

- Абрамовиц М., Стиган И.** Справочник по специальным функциям. – М.: Наука, 1979. – 832 с.
- Боганик Г.Н., Гурвич И.И.** Сейсморазведка. – Тверь: АИС, 2006. – 744 с.
- Бурцев А.П., Денисов М.С., Егоров А.А.** Оптимизационный способ подавления волн-спутников для морских данных, полученных с произвольной геометрией косы. Часть 2: Свойства оператора // Технологии сейсморазведки. – 2016. – № 3. – С. 66–76.
- Гольдин С.В.** Линейные преобразования сейсмических сигналов. – М.: Недра, 1974. – 352 с.
- Гольцман Ф.М.** Основы теории интерференционного приема регулярных волн. – М.: Наука, 1964. – 283 с.
- Градштейн И.С., Рыжик И.М.** Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. – М.: Физматгиз, 1962. – 2000 с.
- Денисов М.С., Егоров А.А.** Оптимизационный способ подавления волн-спутников для морских данных, полученных с произвольной геометрией косы. Часть 1: Модель и алгоритм // Технологии сейсморазведки. – 2016а. – № 3. – С. 57–65.
- Денисов М.С., Егоров А.А.** Оптимизационный способ подавления волн-спутников для морских данных, полученных с произвольной геометрией косы. Часть 3: Применение к модельным и реальным данным // Технологии сейсморазведки. – 2016б. – № 3. – С. 77–82.
- Денисов М.С., Силаенков О.А.** Расширение возможностей обработки результатов сейсмических наблюдений за счет использования процедуры продолжения волнового поля // Технологии сейсморазведки. – 2008. – № 3. – С. 3–18.
- Денисов М.С., Фиников Д.Б.** Методы подавления кратных волн в сейсморазведке. Часть 3. // Технологии сейсморазведки. – 2007. – № 3. – С. 3–17.
- Калиткин Н.Н.** Численные методы. – М.: Наука, 1978. – 512 с.
- Козлов Е.А.** Миграционные преобразования в сейсморазведке. – М.: Недра, 1986. – 248 с.

- Кондратьев И.К.** Линейные обрабатывающие системы в сейсморазведке. – М.: Недра, 1976. – 175с.
- Корн Г., Корн К.** Справочник по математике. – М.: Наука, 1973. – 832 с.
- Оппенгейм А.В., Шафер Р.В.** Цифровая обработка сигналов. – М.: Связь, 1979. – 416 с.
- Петрашень Г.И.** Элементы динамической теории распространения сейсмических волн // Вопросы динамической теории распространения сейсмических волн. Сборник III. – Л.: ЛГУ, 1959. – С. 11–101.
- Петрашень Г.И., Нахамкин С.А.** Продолжение волновых полей в задачах сейсморазведки. – Л.: Наука, 1973. – 171 с.
- Прудников А.П., Брычков Ю.А., Маричев О.И.** Интегралы и ряды. Том 2. Специальные функции. – М.: Физматлит, 2003. – 664 с.
- Самарский А.А.** Введение в численные методы. – М.: Наука, 1982. – 272 с.
- Урупов А.К., Левин А.Н.** Определение и интерпретация скоростей в методе отраженных волн. – М.: Недра, 1985. – 236 с.
- Beasley C., Coates R., Ji Y.** Wave equation receiver deghosting // 75th EAGE Conference & Exhibition: Extended Abstracts. – 2013. – P. 5103–5104.
- Benc D.** Flooding the topography: Wave-equation datuming of land data with rugged acquisition topography // Geophysics. – 1997. – Vol. 62, No. 5. – P. 1558–1569.
- Denisov M., Egorov A., Burtsev A.** A method for deghosting of data recorded with a streamer of arbitrary shape in rough sea conditions // Geophysical Prospecting. – 2018. – Vol. 66, No. 9. – P. 1702–1713.
- Wapenaar C.P.A., Verschuur D.J., Herrmann P.** Amplitude preprocessing of single- and multicomponent seismic data // Geophysics. – 1992. – Vol. 57, No. 9. – P. 1178–1188.

#### **КОРОТКО ОБ АВТОРАХ**

- ДЕНИСОВ Михаил Сергеевич* – доктор физико-математических наук, директор по науке ООО «ГЕОЛАБ». Научные интересы: разработка алгоритмов обработки данных сейсморазведки.
- ЕГОРОВ Антон Алексеевич* – геофизик ООО «ГЕОЛАБ». Научные интересы: разработка алгоритмов обработки данных сейсморазведки, полное обращение волновых полей, e-mail: anton21egorov@gmail.com.